

ISSN 1519-4612

Universidade Federal Fluminense
TEXTOS PARA DISCUSSÃO
UFF/ECONOMIA

Universidade Federal Fluminense
Faculdade de Economia
Rua Tiradentes, 17 – Ingá – Niterói (RJ)
Tel.: (0xx21) 2629-9699 Fax: (0xx21) 2629-9700
<http://www.uff.br/econ>
esc@vm.uff.br

Moeda, Inflação e Expectativas

Luiz Fernando Cerqueira

TD 252
Novembro/2009

RESUMO

Neste artigo estudamos regras clássicas de formação de expectativas, modelos de hiperinflação e inflação, bem como seus resultados normativos, que representam, segundo a nossa perspectiva, de forma estilizada as fases pelas quais atravessou a inflação brasileira entre 1960 e 2005. O pivô da digressão é o modelo de Cagan (1956). Destacamos vários resultados. Sob a hipótese de parâmetros variáveis ou com expectativas racionais pode emergir um processo megainflacionário, motivado pelos fundamentos, no lugar de uma hiperinflação. Com a introdução de uma moeda indexada, o crescimento da dívida pública realimenta o processo inflacionário indefinidamente, tendo como elemento transmissor a elevação persistente da taxa de juros. Em uma economia sujeita a congelamentos de preços intermitentes, as expectativas inflacionárias podem passar a depender dos e a se acelerar com a ocorrência desses choques. Se uma política monetária acomodatória é executada, esses tipos de planos de estabilização conduzem a inflação para uma trajetória que se aproxima de um processo hiperinflacionário. O modelo de Cagan com expectativas racionais não possui uma solução única para a taxa de inflação, havendo a possibilidade de ocorrência de bolhas especulativas ou *sunspots*, nos momentos de clímax da taxa de inflação, as quais podem impedir a implantação de uma política de estabilização exitosa. Numa economia com regime inflacionário persistente, a regra de formação de expectativas adaptativas é motivada pela falta de informação, pela incerteza e a existência de um sistema eficiente de indexação. A passagem para a regra de expectativas racionais envolve um período de transição durante o qual os agentes não são completamente *forward looking*, havendo elevada persistência dos choques de preços, que se acentua com a existência de um déficit público e grau de acomodação da política monetária. Se os agentes estão passando por um processo de aprendizado de mínimos quadrados ordinários, no modelo de Cagan sob expectativas racionais a taxa de inflação alta é a de equilíbrio estacionário e a estática comparativa é perversa, porém ela é capaz de explicar a ocorrência de processos megainflacionários. De outro lado, sob o processo de aprendizado a dinâmica é lenta, mas a economia converge para a taxa baixa de inflação, que é uma solução de expectativas racionais com estática comparativa clássica. Finalizamos apresentando a estrutura do modelo em que é estimada a demanda por moeda no contexto do modelo de Cagan, em que pode ser testada a hipótese de que as expectativas são adaptativas contra a hipótese de que as expectativas sejam racionais, e também a hipótese da presença de bolhas especulativas e *sunspots* contra a sua ausência, o que

permite especular que a economia encontrava em um processo megainflacionário, *i.e.*, se deslocava ao longo do lado direito da curva de Laffer do imposto inflacionário em direção à taxa alta de equilíbrio estacionário.

Palavras Chave: testes de hipóteses, construção de modelos econométricos, megainflação, demanda por moeda, oferta de moeda, regime monetário e déficit público.

JEL: C12, C51, E31, E41, E51, E62.

1. Introdução

O objetivo primeiro deste artigo é apresentar uma digressão sobre modelos clássicos de formação de expectativas inflacionárias e modelos de inflação e hiperinflação. O foco é sobre modelos que abordem o processo inflacionário como sendo causado por um déficit público permanente, em parte financiado pela coleta da senhoriação. A nossa estratégia de investigação passa por analisar e comparar os resultados dos modelos combinados às diferentes regras de formação de expectativas. Por questões de exposição, as regras de expectativas são apresentadas primeiro separadamente e depois inseridas no contexto de um modelo completo.

O segundo objetivo é apresentar a estrutura do modelo em que é estimada a demanda por moeda no contexto do modelo de Cagan; em que pode ser testada a hipótese de que as expectativas são adaptativas contra a hipótese de que as expectativas sejam racionais; e também a hipótese da presença de bolhas especulativas e *sunspots* contra a sua ausência e, assim, poder especular que a economia encontrava-se em um processo megainflacionário, *i.e.*, se deslocava ao longo do lado direito da curva de Laffer do imposto inflacionário em direção à taxa alta de equilíbrio estacionário.

As contribuições do artigo são a de reunir os resultados e as conclusões normativas de diferentes modelos teóricos cujos fatos estilizados decorrentes possuem elevada capacidade de representação das várias fases pelas quais atravessou a inflação brasileira entre 1960 e 2005. E a de explicitar os procedimentos dos testes das hipóteses sobre as regras de expectativas e a presença de bolhas.

Este artigo foi elaborado tendo por base principalmente as seguintes referências: Blanchard e Fischer (1989) cap. 4 e 5, Bodin (1988), Bruno (1989), Bruno e Fisher (1990), Cagan (1956), Cerqueira (1993), Cysne e Simonsen (1995) cap. 10 e 11, Evans e Honkapohja (1999 e 2001) cap. 1 a 3, Lucas (1972 e 1976), Marcet e Sargent (1989), McCallum (1989) cap. 7 a 9, McCallum (1996) cap. 8, Muth (1960 e 1961), Obstfeld e Rogoff (1997) cap. 8, Romer (2001) cap. 5, Sargent e Wallace (1973a, 1973b, 1986, 1987), Simonsen (1990 e 1991), Taylor (1975, 1979 e 1999), Turnovsky (2000) cap. 2 a 4.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na seção 2 digredimos sobre regras de formação de expectativas inflacionárias; na seção 3 apresentamos diversas variantes do modelo de inflação/hiperinflação de Cagan (1956) e na seção 4 estendemos o modelo de modo a conter uma moeda indexada. Na seção 5 introduzimos um modelo inédito que supõe que as expectativas inflacionárias sejam determinadas pela ocorrência de planos de estabilização baseados em choques de oferta. Retomamos, na seção 6, o modelo de Cagan com expectativas racionais e tempo discreto, bem como analisamos a sua estabilidade e a possibilidade de ocorrência de bolhas especulativas. Na seção 7 fazemos uma digressão sobre a transição da regra de expectativas adaptativas para expectativas racionais. Digredimos, na seção 8, sobre a modelagem necessária para a realização de testes empíricos sobre as hipóteses de expectativas inflacionárias e a ausência de bolhas especulativas. E apresentamos, na seção 9, nossas conclusões.

2. Expectativas Adaptativas, Racionais e Aprendizagem de OLS

Em tempo discreto, no esquema adaptativo de Cagan (1956), as expectativas inflacionárias obedecem à seguinte regra de formação, conhecida como hipótese do *error-learning*

$$\pi_{t+1}^e - \pi_t^e = b(\pi_t - \pi_t^e). \quad (1)$$

A noção é de que as expectativas sejam ajustadas apenas se as expectativas do último período estiverem erradas, em um contexto de um modelo determinístico. Se ontem o nível da inflação foi subestimado ($\pi_t > \pi_t^e$), a inflação esperada (π_{t+1}^e) é maior do que π_t^e e vice-versa.

Usando o operador de lags L , tal que $Lx_t = x_{t-1}$, temos que a equação (1) pode ser reescrita para

$$\pi_{t+1}^e = \frac{b}{1 - (1-b)L} \pi_t, \quad 0 < b < 1, \quad (2)$$

assim

$$\pi_{t+1}^e = b \sum_{i=0}^{\infty} (1-b)^i \pi_{t-i}. \quad (3)$$

A equação (3) mostra que, independentemente da interveniência de outros fatores, as expectativas são inteiramente determinadas pela média ponderada da inflação passada, com pesos gradativamente decrescentes para as taxas de inflação mais distantes no tempo. Uma implicação de (3) é que o nível da inflação esperada em t (é estranho que algumas dessas letras estejam em negrito, outras em itálico, outras com ambos os formatos... e outras não! Não seria melhor tentar uniformizar tudo?)) não pode ser, dado (3), maior do que a maior taxa de inflação observada até essa data. Assim, no limite, se $b \rightarrow 1$, então $\pi_{t+1}^e \rightarrow \pi_t$.

Uma maneira alternativa de formar expectativas inflacionárias é tratando a taxa de inflação futura como uma variável aleatória – o que é natural – e condicionando a determinação da inflação esperada para $t + 1$ ao conjunto de informações disponíveis um passo atrás, digamos, I_t . Então temos que a taxa de inflação futura é dada por

$$\pi_{t+1} = E(\pi_{t+1} / I_t) + \varepsilon_{t+1}, \quad \varepsilon_{t+1} \sim (0, \sigma^2), \quad (4)$$

onde I_t contém os fundamentos da economia (como as políticas fiscal e monetária presentes e esperadas, a política cambial e o comportamento esperado da taxa de câmbio, a expectativa de ocorrência de choques de oferta vindos do lado real da economia, de choques de demanda derivados de outras fontes que não da política econômica, da taxa de crescimento econômico etc.), assim como a expectativa de ocorrência de choques externos de diversas naturezas. Porém os fundamentos não incluem, em princípio, distúrbios vindos do mercado de bens e de ativos financeiros não explicados de forma não racional, como bolhas especulativas e *sunspots*. Isto porque, em um mundo habitado por agentes racionais, comportamentos explosivos estão por hipótese descartados. Entramos então no mundo das expectativas racionais.

A hipótese de expectativas racionais envolve supor que (i) toda a informação relevante passada está contida nas informações conhecidas em t ; (ii) o passado não importa, e a inflação presente ou futura está relacionada com os fundamentos futuros da economia, com as incertezas sobre o comportamento da autoridade econômica e/ou da falta de credibilidade ou perda de confiança sobre essa última; assim, as expectativas são totalmente *forward looking*, ao contrário das expectativas adaptativas, voltadas para o passado; (iii) as expectativas são formadas com base no modelo que descreve o comportamento observado da variável em questão.

O último item pode ser verificado a partir da seguinte digressão. Suponhamos que a taxa de inflação obedeça à seguinte equação de diferenças estocásticas

$$\pi_{t+1} = \gamma E[\pi_{t+1} | I_t] + \beta Z_{t+1} + \varepsilon_{t+1}, \quad (5)$$

¹ Repare que, pela lei das expectativas iterativas $E[E[\pi | I_{t+1}] | I_t] = E[\pi | I_t]$, ou seja, a expectativa hoje sobre a expectativa do próximo período é a mesma que a expectativa atual sobre π . Note a necessidade da hipótese de não haver perda de memória, porque sem a hipótese o resultado não prevalece.

onde ε_t é um distúrbio aleatório tal que $E[\varepsilon_{t+1} | I_t] = 0$ e Z_{t+1} é um vetor de variáveis explicativas. Tomando esperança dos dois lados da equação condicionada às informações do período t e resolvendo-a, temos

$$E[\pi_{t+1} | I_t] = \frac{\beta}{1-\gamma} E[Z_{t+1} | I_t], \quad (6)$$

que são as expectativas inflacionárias construídas a partir do modelo, sendo portanto endógenas. Substituindo (6) em (5) e tomando novamente esperanças condicionais, obtemos

$$E[\pi_{t+1z} | I_t] = \gamma \frac{\beta}{1-\gamma} E[Z_{t+1} | I_t] + \beta E[Z_{t+1} | I_t], \quad (7)$$

logo recuperamos a equação (6), que é a regra de expectativa, o que mostra que a solução do modelo sob expectativas racionais é consistente com a regra de formação das expectativas; ver Blanchard e Fischer (1989). Ou seja, os agentes fazem previsões com expectativas racionais de forma internamente consistente com o modelo utilizado para prever a variável que eles procuram.

Apesar de endógenas com respeito ao modelo no qual está inserida – *i.e.* não são *ad hoc* – e de serem consistentes, a hipótese das expectativas racionais supõe que os agentes conheçam não apenas o modelo econômico subjacente, como também os valores dos parâmetros envolvidos, os quais são conhecidos ou aprendidos através de um processo de aprendizado do tipo *learning-by-doing*; ou seja, através da repetição da “situação” e das mudanças de política econômica, os agentes aprendem como funciona o modelo.

É interessante ter em conta que pelo menos em um caso as expectativas adaptativas podem ser racionais; ver Muth (1960). Se as expectativas são racionais, a taxa de inflação segue a equação (4); se as expectativas são adaptativas, vale a equação (3). Se então as expectativas adaptativas forem racionais, temos que

$$\pi_{t+1}^e = \frac{b}{1-(1-b)L} \pi_t = E[\pi_{t+1} | I_t], \quad (8)$$

dado que $E[\varepsilon_{t+1} | I_t] = 0$. Usando (8) em (4), obtemos

$$\Delta \pi_{t+1} = \varepsilon_{t+1} - (1-b)\varepsilon_t, \quad (9)$$

onde Δ é o operador de primeiras diferenças. Logo, se as expectativas adaptativas são racionais, a taxa de inflação deve seguir um processo estocástico do tipo IMA(1).

O modelo de aprendizado com o mecanismo de mínimos quadrados, conforme Marcat e Sargent (1989a), é dado por

$$E[\pi_{t+1} | I_t] = \beta_t \pi_t, \quad (10)$$

onde β_t é calculado por mínimos quadrados pela expressão

$$\beta_t = \left[\sum_{s=1}^{t-1} \pi_{s-1}^2 \right]^{-1} \left[\sum_{s=1}^{t-1} \pi_s \pi_{s-1} \right]. \quad (11)$$

Pela equação (11), os agentes estimam o coeficiente β_t para formar expectativas em uma regressão de mínimos quadrados de π_s sobre π_{s-1} ,

$$\pi_s = \beta_t \pi_{s-1} + \varepsilon_s, \quad (12)$$

usando dados disponíveis até $(t-1)$. As expectativas são então pela expressão

$$E[\pi_{t+1} | I_t] = \hat{\beta}_t \pi_t. \quad (13)$$

Os agentes rodam a regressão (12) por OLS a cada período, reestimando o modelo e formando previsões sobre a taxa de inflação futura. Como o estimador de OLS é consistente, *i.e.*, $\hat{\beta}_t \xrightarrow{P} \beta$, ele converge para o verdadeiro parâmetro populacional, e, portanto, o processo de aprendizado de mínimos quadrados conduz à solução de expectativas racionais,

que é um equilíbrio de estado estacionário ou um equilíbrio tempo-invariante de expectativas racionais, o qual poder ser visto como um ponto fixo.

Assim, em equilíbrio de *steady state*, a solução de aprendizagem de OLS é a mesma de expectativas racionais, mas as dinâmicas são diferentes, porque sob expectativas racionais o modelo é internamente consistente, o que conduz imediatamente a uma solução, o que por hipótese não ocorre com o processo de aprendizado; ver Marcet e Sargent (1989a). Por Sargent e Wallace (1986 e 1987), a solução de expectativas racionais é de previsão perfeita, onde β_t da equação (10) tem como expressão

$$\beta_t = \frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}, \quad (14)$$

que é a aceleração inflacionária bruta entre os instantes t e $t + 1$.

Em tempo contínuo determinístico, as expectativas inflacionárias adaptativas possuem a forma

$$\dot{\pi}^e = b(\pi - \pi^e), \quad (15)$$

onde b é a velocidade de revisão das expectativas, ou o inverso da memória inflacionária ($1/b$). Essa equação pode ser resolvida para a inflação esperada multiplicando-se ambos os lados pelo fator de integração e^{bs} e depois resolvendo uma integral por partes, chegando-se, assim, à expressão

$$\pi_t^e = b \int_{-\infty}^t e^{b(s-t)} ds. \quad (16)$$

Isso significa que a taxa de inflação esperada para o instante t é uma média ponderada das taxas de inflação observadas até o instante t , com pesos exponencialmente cadentes para o passado. Quanto maior b , menor a memória inflacionária, no sentido de que menor é a influência das taxas de inflação remotas sobre as recentes, na formação das expectativas de inflação.

Sob expectativas racionais e sendo o modelo não estocástico, o termo ε_{t+1} da equação (4) tem variância zero. Logo recaímos no caso particular de previsão perfeita, ou seja, $\pi_{t+1} = E[\pi_{t+1} | I_t]$. Esse resultado também pode ser obtido a partir da equação (15), fazendo com que os agentes deixem de ser *backward looking*, isto é, deixando $b \rightarrow \infty$. Assim

$$\frac{\dot{\pi}^e}{b} = \pi - \pi^e \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \pi^e = \pi, \quad (17)$$

ou seja, se a memória inflacionária tende para zero, os agentes passam a não cometer mais erros nas suas previsões da taxa de inflação futura.

3. Senhoriagem, Inovações Financeiras e Dinâmica da Inflação

Cagan (1956), em seu estudo clássico sobre as hiperinflações europeias da década de 20, supõe completa flexibilidade de preços e que estes são determinados pela condição de equilíbrio no mercado de moeda. Especificamente, supõe que a demanda por moeda seja dada por

$$m_t^d - p_t = -a\pi_t^e + \varepsilon_t, \quad a < 1, \quad (18)$$

onde m_t^d é logaritmo da demanda nominal de moeda, p_t é log do nível geral de preços, a é a semielasticidade juros da demanda por moeda e ε_t um distúrbio estocástico. Como essa demanda por moeda supõe um ambiente de alta inflação, a taxa real de juros (r) não importa e nesse caso – dado que o efeito Fisher prevalece – a taxa nominal de juros iguala as expectativas inflacionárias, *i.e.*, $i_t \cong r_t + \pi_t^e \cong \pi_t^e$.

Se a oferta de moeda m^s for exógena, o equilíbrio no mercado de moeda será dado por $m_t^d = m_t^s = m_t$, assim

$$m_t - p_t = -a\pi_t^e + \varepsilon_t. \quad (19)$$

Tomando diferenças de (19), usando a equação de expectativas (3) e procedendo a rearranjos, obtemos a equação de determinação da taxa de inflação corrente dada por

$$\pi_t = \frac{\Delta m_t}{1 + a(1-b)} + \frac{ab}{1 + a(1-b)} \sum_{i=1}^{\infty} (1-b)^i \pi_{t-i}. \quad (20)$$

De acordo com (20), a inflação presente será tanto maior quanto maior for a taxa corrente de expansão monetária e maiores tiverem sido as taxas de inflação no passado.

Esse modelo simples apresenta uma explicação monetária para a taxa de inflação. Elevadas taxas de crescimento da oferta de moeda causam altos níveis de inflação. Porém, mesmo nesse caso, outros fatores, como as expectativas e as mudanças na demanda por moeda (ε_t), afetam a taxa de inflação. Taxas de inflação defasadas afetam a inflação corrente nesse modelo porque afetam as expectativas inflacionárias.

Esses fatos estilizados ficam mais claros se considerarmos o modelo em tempo contínuo formado pela equação (15) e pela demanda por moeda – equação (18) modificada – dada por

$$m \equiv \frac{M}{P} = cY \exp(-a\pi^e), \quad (21)$$

onde M indica a oferta monetária, Y o produto, P o índice geral de preços, c um termo constante – que representa também as inovações financeiras –, e π^e a taxa instantânea de inflação esperada. Suponhamos que se mantenha inalterada no tempo a taxa real de juros r . Tomando logs de (21), derivando em relação ao tempo, combinando com (15) e resolvendo para π^e , obtemos a seguinte expressão para a taxa de inflação esperada

$$\pi^e = \frac{\mu - y - (1-ab)\pi}{ab}, \quad (22)$$

onde μ é a taxa de expansão monetária medida pela variação da base e y é a taxa de crescimento do produto².

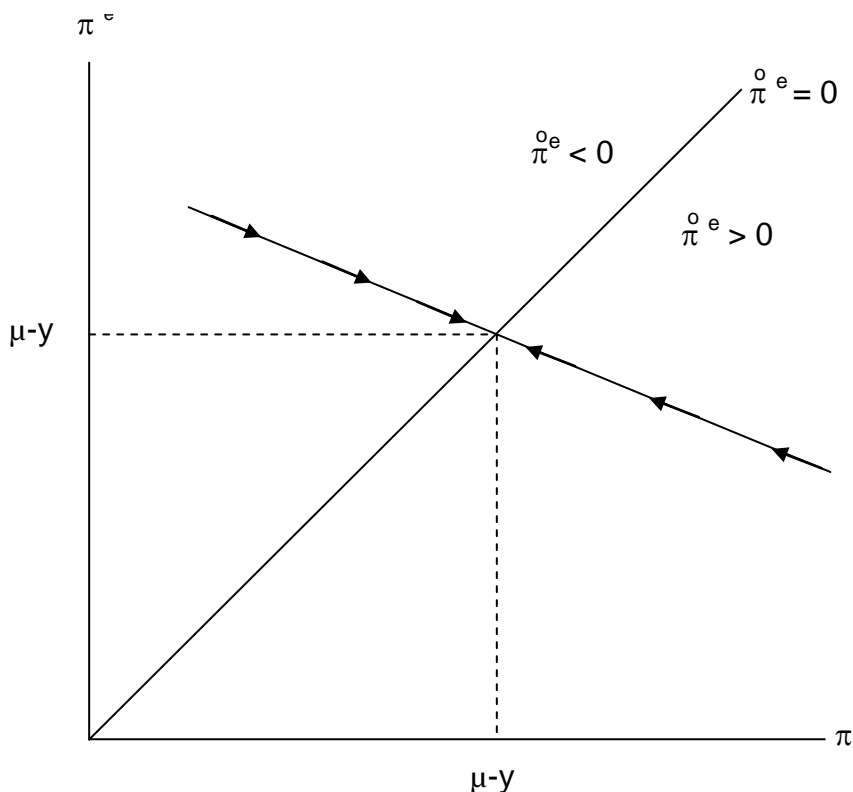
Na figura 1, mostramos o diagrama de fases de π^e para uma dada taxa de crescimento monetário, no plano (π, π^e) , junto com a reta de 45°, tal que $\dot{\pi}^e = 0$. Obedecendo-se à condição de estabilidade de Cagan $ab < 1$, então $d\pi^e / d\pi < 0$, logo o equilíbrio é estável; isto é, supondo uma situação inicial de desequilíbrio, π^e converge para π , e logo π converge para $\mu - y$; em estado estacionário $\pi^e = \pi = \mu - y$ ³.

² Nesse caso, há um espaço para o financiamento do déficit público com expansões monetárias não inflacionárias derivadas do crescimento do produto.

³ Se $ab > 1$, então $d\pi^e > d\pi$ ao longo de (22), logo o equilíbrio é instável. Dependendo das condições iniciais, a economia pode ter uma inflação em contínua aceleração ou uma aceleração deflacionária. Pode existir, assim, uma hiperinflação com taxa de expansão da oferta de moeda constante, dependendo dos valores assumidos por a e b , que refletem, respectivamente, a semi-elasticidade da demanda por moeda e a velocidade de revisão das expectativas. Intuitivamente, o equilíbrio é instável se $ab > 0$, porque, quanto maior b , maiores taxas de inflação levam os agentes a revisarem rapidamente para cima as suas expectativas de inflação e a tentarem reduzir seus encaixes monetários. Dada a taxa de expansão monetária, a velocidade da moeda aumenta, elevando a taxa de inflação, o que conduz a novas revisões e acelera ainda mais a inflação. Se a é grande, um aumento na inflação que conduza a uma revisão para cima da inflação esperada tem um efeito negativo forte sobre a demanda por moeda e, desse modo, sobre a velocidade, levando a uma nova aceleração da inflação. Dessa forma, se os agentes possuem expectativas adaptativas, é possível que a hiperinflação resulte não de uma aceleração da taxa de expansão monetária, mas de um comportamento desestabilizante dos agentes, o qual se reflete nos valores dos parâmetros que produzem um processo instável autopropulsionado inerente à economia; ver Blanchard e Fisher (1989) e Bruno e Fisher (1990).

Um crescimento da expansão monetária (figura 2) derivado de um aumento exógeno na coleta de senhoriagem e/ou da contração de demanda por moeda provoca um aumento da taxa de inflação de A para B' que se transmite para as expectativas inflacionárias, que por sua vez realimentam a taxa de inflação, o que faz crescerem as duas taxas até que as expectativas se estabilizem. Uma outra intuição é que, se as expansões monetárias forem sempre vistas como inflacionárias, um aumento de μ provoca uma alta imediata da inflação esperada para B" não acompanhada pela taxa de inflação, a qual reage defasadamente ao crescimento monetário. As expectativas puxam assim a taxa de inflação até convergirem para a nova taxa de expansão monetária a menos do crescimento do PIB.

Figura 1: Dinâmica da Taxa de Inflação com Taxa de Expansão Monetária Dada



As inovações financeiras, ao produzirem novos ativos lastreados em títulos públicos com maior liquidez e menor risco de perda de capital do que esses títulos, acabam por gerar uma maior taxa de inflação para um mesmo déficit público, porque contraem a demanda monetária e aumentam a velocidade de circulação da moeda, dados o produto real, a taxa real de juros e as expectativas inflacionárias. Os compromissos de recompra de títulos públicos do Banco Central agravam essa situação ao permitir uma maior intensidade do ritmo de inovações, uma vez que praticamente eliminam o risco de perda de capital, ao dar liquidez quase instantânea ao excesso de títulos sobre o passivo das instituições financeiras a um preço muito próximo ao fixado pela curva de rendimento real do título. Isso confere aos títulos públicos uma liquidez próxima à da moeda e, desta forma, faz com que o efeito deslocamento da dívida pública recaia primordialmente sobre a demanda de moeda, ao invés de incidir sobre o capital privado⁴; ver Cerqueira (1993).

⁴ Pela equação de demanda por moeda de Baumol – $M^d = p\sqrt{cY/2i}$ – verifica-se que, dada a renda real (Y) e a taxa nominal de juros (i), a queda do custo de transação (c) na conversão de outros ativos em moeda reduz a procura nominal de moeda (M^d).

Independentemente da existência ou não de inovações financeiras, a busca de um certo grau de senhoriagem com o objetivo de financiar uma parcela de um déficit público permanente pode levar, sob certas condições, a uma inflação sempre crescente. A senhoriagem é a soma do imposto inflacionário com a expansão da base monetária real. Isto pode ser observado derivando a base real (M/P) em relação ao tempo. Rearranjando os termos obtemos

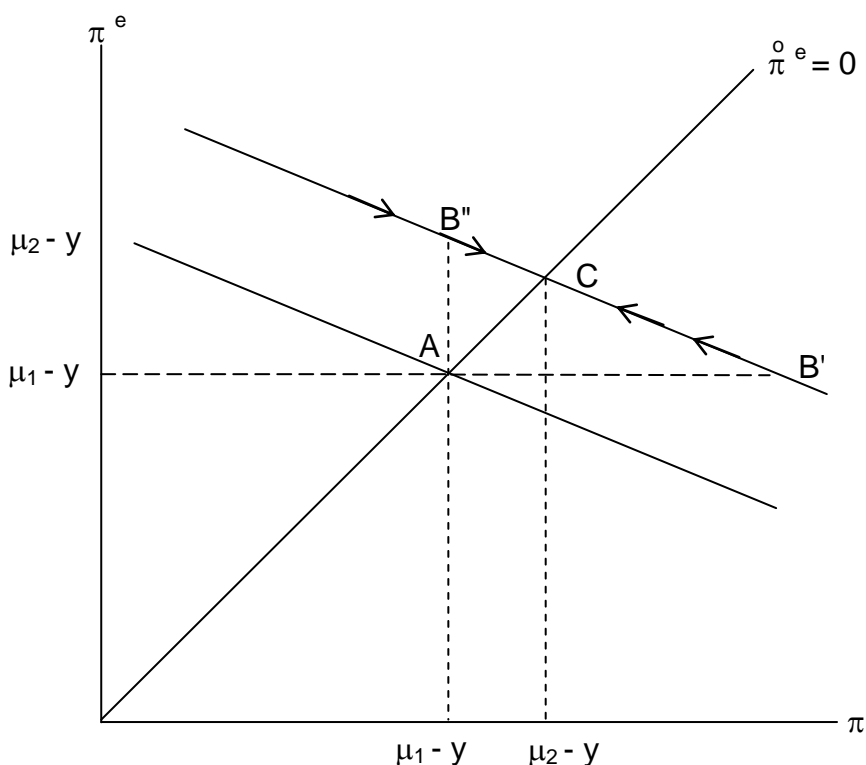
$$S = (\dot{M}/P) = (M/P)\pi + d(M/P)/dt = (\dot{M}/P) + (\dot{M}/P), \quad (23)$$

que rescrita como fração do PIB toma a forma

$$S = (\dot{M}/PY) = (\dot{M}/M)(M/PY) = \mu c \exp(-a\pi^e) = \mu m. \quad (24)$$

Em estado estacionário $\dot{\pi}^e = 0$ e $\pi^e = \pi$, logo $\pi = \mu$, e nesse caso a senhoriagem é igual ao imposto inflacionário. A senhoriagem é máxima ($S^* = c/ae$) quando $\pi = 1/a$. Em estado estacionário, a variação da base real é zero.

Figura 2: Variação da Taxa de Expansão Monetária e seu Efeito sobre a Inflação



Uma elevação da taxa de inflação esperada reduz o estoque desejado de moeda, o que pode aumentar ou diminuir o imposto inflacionário, dependendo de estarmos no ramo ascendente ou descendente da curva da Laffer. Mas a outra componente da senhoriagem (\dot{M}/P) será negativa se a autoridade monetária (AM) não elevar μ quando a taxa de inflação esperada for crescente. Se estivermos no ramo descendente da curva de Laffer do imposto inflacionário, é necessário, para que a senhoriagem seja constante, elevar continuamente a taxa de expansão monetária sempre que as expectativas de inflação estiverem crescendo, o que aumenta continuamente a taxa de inflação.

Se a autoridade monetária viesse criando base e gerando uma taxa de inflação sobre o ramo ascendente da curva de Laffer, a contração da demanda de moeda conduziria a uma taxa de inflação maior. No entanto, a contração da demanda por moeda real pode chegar a um tal ponto, que o máximo do imposto inflacionário seja menor que o déficit público financiado por moeda. Nesse caso, a única forma de elevar ou manter a senhoriagem é acelerando continuamente a taxa de expansão monetária e, conseqüentemente, a taxa de inflação. A AM

operaria então como se desejasse elevar o estoque real de moeda, o que se constitui numa rota curta e segura para uma hiperinflação; ver Cerqueira (1993).

A descrição acima pode ser estabelecida formalmente utilizando-se o modelo formado pelas equações de expectativas (15) e de demanda por moeda (21). Consideremos inicialmente uma economia com um déficit operacional com uma parcela constante financiada com senhoriagem e cuja autoridade monetária deliberadamente mantenha a coleta de senhoriagem fixa através de ajustes na expansão monetária. Desse modo, a oferta monetária é endógena por uma decisão de política econômica. Consideremos então a equação (24) com $S = \bar{S}$; assim a autoridade monetária criará base ao longo da curva de reação dada por

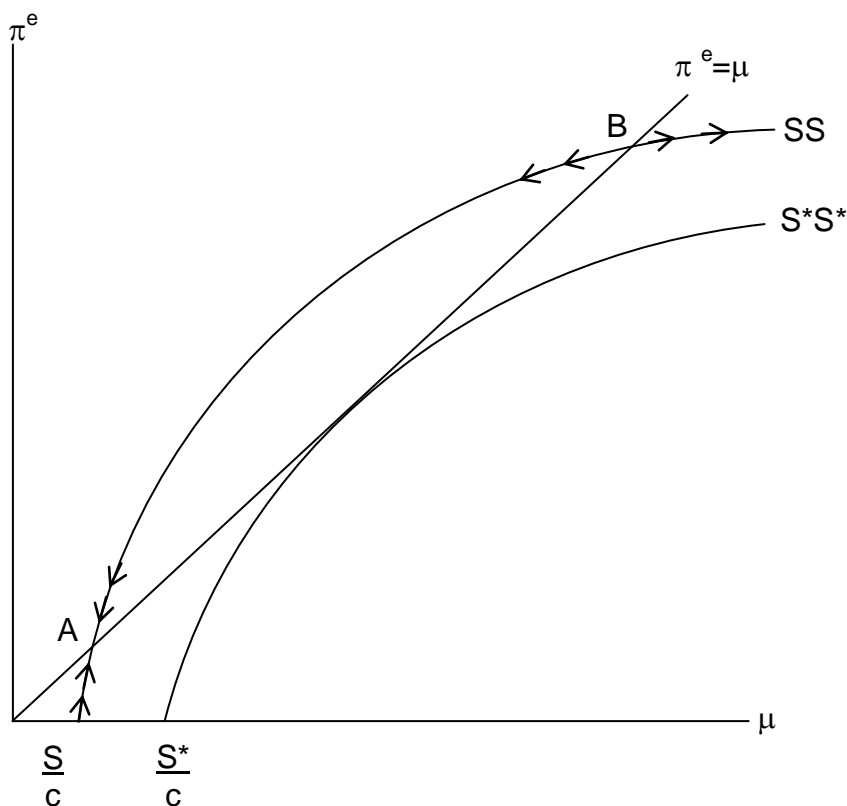
$$\mu = \frac{\bar{S}}{c \exp(-a\pi^e)}. \tag{25}$$

Por essa equação, a taxa de expansão monetária é função crescente da taxa de inflação esperada e, portanto, passiva; ver Blanchard e Fischer (1989). Tomando logs de (24) e resolvendo para π^e , obtemos

$$\pi^e = (1/a) \log(\mu c / S), \tag{26}$$

onde $(d\pi^e / d\mu) = (1/a\mu) > 0$ e $(d^2\pi^e / d\mu^2) = -(1/a\mu^2) < 0$; além disso, se $\pi^e = 0$, então $\mu = S/c$. Assim, temos as características da curva SS, que aparece na figura 3 no plano (π^e, μ) , o espaço das combinações de inflação esperada e crescimento monetário que produzem um dado nível de senhoriagem S. A reta de 45° representa os pontos de estado estacionário tais que $\dot{\pi} = 0$ e $\mu = \pi^e = \pi$.

Figura 3: Dinâmica da Inflação dada a Senhoriagem ($ab < 1$)



Adotando procedimentos algébricos similares para a obtenção da equação (22), podemos derivar a dinâmica da taxa de inflação esperada, dada por

$$\dot{\pi}^e = \frac{b}{1-ab}(\mu - y - \pi^e). \quad (27)$$

Respeitada a condição de estabilidade de Cagan de que $\alpha\beta < 1$, π^e converge para o ponto **A**, onde $\pi^e = \pi = \mu$ e que é o ponto de equilíbrio estável. Abaixo da área dos pontos de estado estacionário $\dot{\pi}^e > 0$, e acima $\dot{\pi}^e < 0$. O ponto **B** é o ponto de equilíbrio instável. Sobre a curva SS, a autoridade monetária estará sempre criando base monetária, e a direção das flechas indica a direção do movimento de μ e π^e . À esquerda de **B** (figuras 3 e 4), a senhoriagem pode ser mantida constante, declinando a taxa de expansão monetária porque a queda das expectativas desacelera a velocidade renda da moeda e expande a demanda monetária. De outra parte, se as expectativas inflacionárias são suficientemente baixas, a AM pode obter maior receita de senhoriagem do que obteria em estado estacionário através da expansão acelerada da oferta monetária. Por esse modelo, uma hiperinflação não surge de um comportamento desestabilizante dos agentes, caso $\alpha\beta < 1$, mas de um descontrole monetário produzido pelo comportamento desestabilizante da autoridade monetária – ainda que empurrada pela autoridade fiscal –, compelida a elevar continuamente μ para produzir a senhoriagem requerida pelos déficits permanentes.

Uma hiperinflação ocorre quando a taxa de inflação esperada atinge um nível superior à relativa ao ponto **B**, obrigando a AM a elevar continuamente μ – a uma taxa superior à de π , o que faz o termo (M/P) ser agora crescente – porque o imposto inflacionário cai por seguidas vezes, o que mais facilmente se observa na figura 5. Uma outra possibilidade de surgimento de um processo hiperinflacionário aparece quando o déficit público que se deseja financiar com senhoriagem for superior ao máximo do imposto inflacionário que pode ser arrecadado em estado estacionário, o qual é atingido quando $\mu = \pi = 1/a$, ou seja, quando $S > S^*$. Nesse caso, não existe estado estacionário, porque sobre a nova S a inflação esperada nunca é igual à taxa de expansão da oferta de moeda e porque não há como o governo coletar mais do que S^* do imposto inflacionário em estado estacionário. A inflação cresce então indefinidamente, dado que o governo coleta senhoriagem acelerando a taxa de inflação. Esta é uma situação que pode surgir motivada por contrações da demanda por moeda, via de regra derivadas de um processo contínuo de inovações financeiras, independentemente da evolução da renda real e do custo de reter moeda, o que é representado pela redução do parâmetro c da demanda por moeda; ver Cerqueira (1993).

Suponhamos que a economia esteja no equilíbrio estável **A**, e c se reduza para c' , deslocando a curva SS para $S'S'$, como mostra a figura 4. Isso produz um salto instantâneo na taxa de expansão monetária (de **A** para **B**) e conseqüentemente da inflação – efeito que se observa pela figura 2 (do ponto **A** para **B'**) – e em seguida um aumento gradual de μ e π^e pela passagem de **B** para **C** (figura 4), acendendo, com isso, as expectativas, cuja aceleração é tão mais rápida quanto menor a memória inflacionária $1/b$ ou quanto maior a semi-elasticidade custo da demanda por moeda a . No novo equilíbrio estável **C**, a taxa de inflação é agora maior do que antes do deslocamento da demanda de moeda. Assim, a contração da demanda por moeda traz uma redução da capacidade de coletar senhoriagem. Para níveis muito elevados de senhoriagem, a curva de reação poderá não mais cruzar a reta de 45°, então a inflação convergirá para o infinito. E mesmo que a taxa de inflação esperada que precede ao deslocamento estivesse em π_0^e , a qual convergiria para um equilíbrio estável, ela seria, com a contração da demanda, lançada para a região de instabilidade onde a taxa de expansão monetária cresce indefinidamente, provocando um processo inflacionário explosivo.

Resultados semelhantes são obtidos supondo que a fração do déficit público operacional como financiado com senhoriagem seja dada por uma proporção constante do PIB, tal como na equação (23). Assim, temos $k = \dot{M}/PY$, porém a AM não segue uma curva de reação como

(25), sendo agora a taxa de expansão da oferta monetária exógena. Para produzir o fluxo de receita monetário necessário para financiar o desequilíbrio das contas públicas, a variável que se ajusta é o imposto inflacionário. Então de (21), obtemos $k = c \exp(-a\pi^e)(\pi - a\pi^e) e$, substituindo π por sua expressão em função de π^e e $\dot{\pi}^e$ de acordo com a equação (15), temos

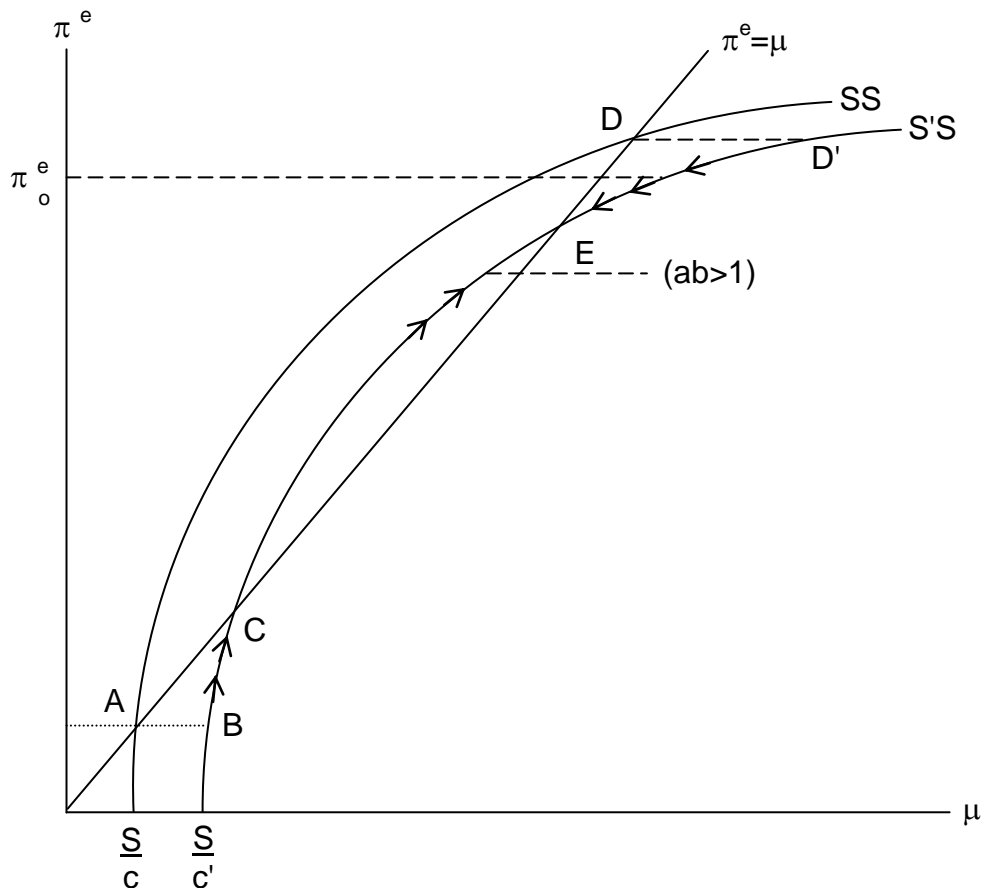
$$\frac{1}{b}(1 - ab)c \exp(-a\pi^e)\dot{\pi}^e = k - \pi^e c \exp(-a\pi^e), \tag{28}$$

que pode ser escrita de forma mais compacta como

$$m\dot{\pi}^e = \frac{b}{1 - ab}(k - \pi^e m). \tag{29}$$

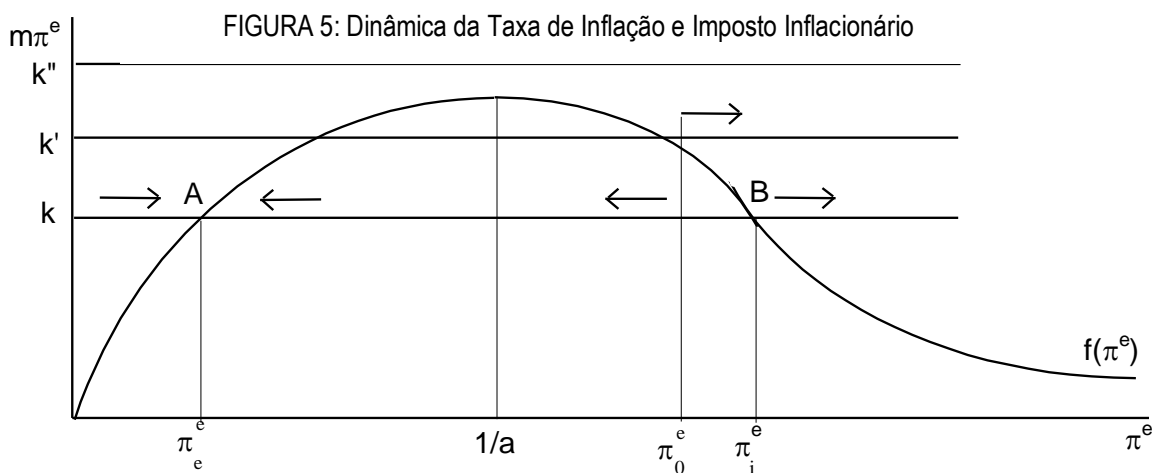
Essa expressão descreve a trajetória da taxa de inflação esperada. Observe que a função $f(\pi) = \pi c \exp(-a\pi)$ representa a arrecadação do imposto inflacionário quando $\pi = \pi^e$. Na figura 5, aparecem a curva do imposto inflacionário $f(\pi^e) = m\pi^e$, as taxas de inflação esperada de equilíbrio estável π_c^e e instável π_i^e , a indicação das trajetórias da inflação esperada e três níveis de déficit público operacional.

Figura 4: Efeito das Inovações Financeiras sobre as Expectativas e a Senhoriagem



Por (29), para que a taxa de inflação esperada se equilibre num nível constante (caso em que por (15) coincidirá com a taxa efetiva de inflação), é necessário que $\dot{\pi}^e = 0$, ou seja, que $k = \pi^e m$. Uma vez que o máximo de imposto inflacionário arrecadável na economia é dado por $\Pi^* = f(\pi^{e*} = 1/a) = c/ae$, temos três casos possíveis: (i) se $k < c/ae$, existem duas taxas constantes de inflação que igualam a arrecadação do imposto inflacionário (II) ao déficit

operacional do setor público, $\pi^e = \pi_e = \pi_i$; (ii) se $k = c/ae$, a única taxa de inflação constante que iguala $\Pi^* = k$ é $\pi = 1/a$; (iii) se $k > \Pi^*$, para qualquer taxa constante de inflação, a arrecadação do imposto inflacionário será inferior ao déficit operacional do setor público.



Se se obedece à condição de estabilidade de Cagan ($ab < 1$) e $k - f(\pi^e) < 0$, π^e converge para o equilíbrio estável π_e^e , desde que a taxa de inflação esperada inicial não seja superior a π_i^e . E se $k > \Pi^*$, a taxa de inflação esperada cresce indefinidamente, levando a uma hiperinflação (k''). Da mesma forma, uma explosão inflacionária ocorrerá se a inflação esperada inicial estiver acima da inflação esperada de equilíbrio instável π_i^e . Reduções na demanda por moeda m motivam igualmente contrações na função de imposto inflacionário, o que, dado um nível de déficit público, implica a elevação na taxa de equilíbrio estável e redução na taxa de equilíbrio instável (ver figura 6), podendo eventualmente resultar numa hiperinflação, caso o déficit operacional fique superior ao imposto inflacionário máximo suportado pela economia (k'') ou caso a taxa de inflação esperada anterior ao deslocamento (π_0^e) acabe por ser catapultada para a zona de instabilidade, onde o crescimento da base monetária real M/P é positivo (ver figura 6).

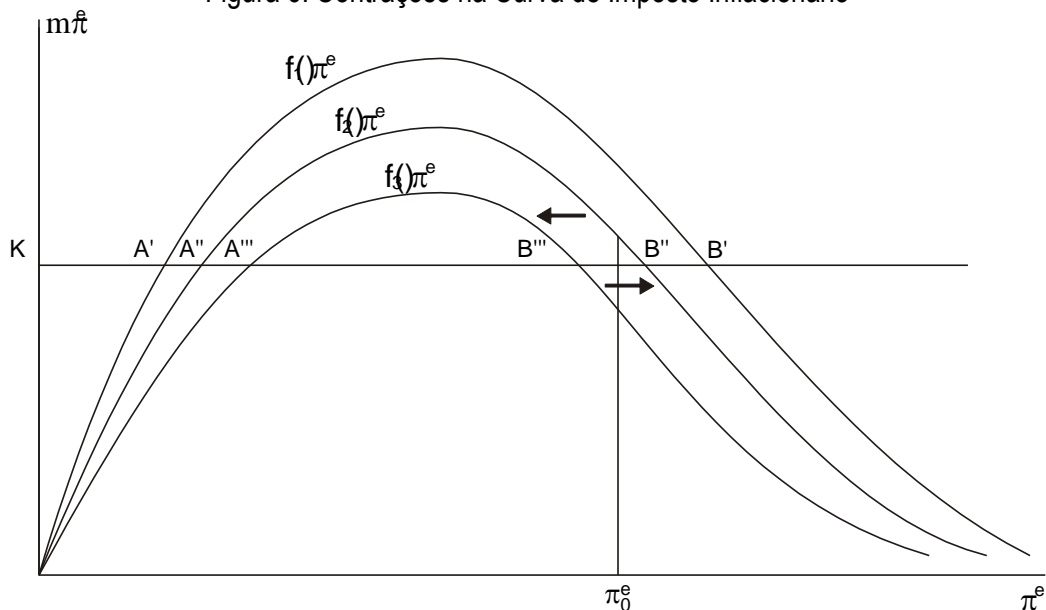
Sob a hipótese de previsão perfeita, caso particular de expectativas racionais, a memória inflacionária tende para zero. Assim, fazendo b tender para infinito em (27) e (29), obtemos as novas trajetórias da inflação com a moeda endógena e com a moeda exógena, respectivamente,

$$\dot{\pi}^e = (\pi^e - \mu) / a \tag{30}$$

$$m\dot{\pi}^e = (\pi^e m - k) / a. \tag{31}$$

Em ambos os casos, o equilíbrio estável passa a se localizar no ponto **B** e o instável no ponto **A** nas figuras 3 e 5 (ultrapassado A a economia seria conduzida a uma deflação de preços ilimitada). A estática comparativa é perversa, dado que um corte no déficit público financiado com senhoriagem aumentará a taxa de inflação, enquanto um aumento permanente no déficit aumenta também a taxa de inflação de equilíbrio estacionário. No caso extremo de expansão monetária nula e conseqüente eliminação da coleta de senhoriagem, não haverá estado estacionário porque a inflação esperada não poderá ser igual à taxa de expansão monetária, o que acarretará um crescimento contínuo da taxa de inflação caso a inflação esperada inicial seja positiva⁵; ver Bruno (1989) e Bruno & Fischer (1990).

Figura 6: Contrações na Curva de Imposto Inflacionário



Tais conclusões são idênticas no caso de instabilidade de Cagan, isto é, com $ab > 1$, todas as setas das figuras 3 a 6 invertem a sua direção. Se as expectativas se ajustam rapidamente (**b** grande) ou se a demanda por moeda é muito elástica em relação à taxa de juros, a economia termina com alta inflação e baixo grau de monetização – saldos de moeda real baixos. Além disso, um aumento na senhoriagem leva em estado estacionário a uma taxa de inflação mais baixa. Todavia, no curto prazo, a taxa de crescimento monetário é maior porque, dada a inflação esperada e logo os saldos reais, esta é a única forma de aumentar a receita com senhoriagem⁶.

*Suponhamos agora que os parâmetros do modelo sejam variáveis, como no modelo de Bruno (1989), isto é, que **b** seja uma função positiva da taxa esperada de inflação; assim, a memória inflacionária se encurta à medida que a inflação aumenta. A dinâmica da taxa de inflação esperada é dada pela equação (29). Na hipótese de previsão perfeita, é imediato que as conclusões sejam as mesmas. Sob a hipótese, porém, de expectativas adaptativas a partir da equação da dinâmica, nada podemos afirmar a priori sobre o estado atual das expectativas π^e .*

⁵ Por (30) ou (31), se $\mu = 0$, então $\dot{\pi}^e = \pi^e / a$; resolvendo essa equação diferencial, temos que $\pi^e = \pi_0^e \exp(t/a)$; logo, salvo a inflação esperada inicial seja zero, as expectativas – e por conseguinte a inflação – crescem indefinidamente.

⁶ Note que, no curto prazo, enquanto a taxa de expansão da moeda cresce, a inflação e de igual modo a inflação esperada decrescem, o que, nesse caso, levanta a questão da plausibilidade da hipótese de expectativas adaptativas. Parece razoável supor que, quando observam uma taxa de crescimento monetário maior, os agentes ajustem para cima suas expectativas de inflação, ao invés de reduzi-las; ver Blanchard e Fischer (1989).

Suponhamos então que exista um π^{e*} tal que $ab(\pi^{e*}) = 1$. Deste modo, dado o déficit financiado com senhoriagem, a convergência de π^e depende do estado das expectativas π_0^e no tempo inicial. Se $\pi_0^e < \pi^{e*}$, vale a condição de estabilidade de Cagan, então a taxa de inflação estável será π_e^e ; porém, se $\pi_0^e > \pi^{e*}$, a economia converge para a armadilha da taxa de inflação alta π_i^e .

Por este modelo, se o governo decide cortar o déficit público e se encontra na armadilha $\pi_0^e > \pi^{e*}$, a taxa de inflação esperada, embora ocorra uma queda na expansão monetária, cresce, levando a uma rápida indexação da economia, o que faz a queda na demanda por moeda ser mais rápida do que a contração monetária⁷. Nessa economia, a inflação está bastante elevada, o que deixa os agentes extremamente “acesos”, tornando as expectativas muito voláteis e inoperante uma redução do déficit público⁸. Dessa forma, qualquer “pipoco” inflacionário muda a direção das setas.

Assim como na hipótese de previsão perfeita, a hipótese de parâmetros variáveis consegue explicar por que a taxa de inflação cresce de **A** para **B** (figuras 3 e 5) e se estabiliza na taxa alta, devido a uma elevação na taxa de expansão monetária. Porém não consegue explicar explosões inflacionárias como aquelas que a hipótese das expectativas adaptativas sugere: à direita de **B** e acima do máximo arrecadável do imposto inflacionário.

Discutimos, até agora, a existência de duas taxas de inflação de estado estacionário que produzem a mesma quantidade de senhoriagem ou de imposto inflacionário. Também argumentamos que a economia pode terminar na taxa de inflação mais alta e que as tentativas da autoridade econômica de financiar uma parcela maior do déficit público com aumentos da senhoriagem podem causar uma hiperinflação. Um aspecto crucial dos resultados apresentados é a regra de formação das expectativas inflacionárias.

4. Moeda Indexada

Suponhamos, agora, que os títulos da dívida pública sejam substitutos “perfeitos” da moeda, funcionando inclusive como meio de troca, o que equivale a introduzir uma moeda indexada na economia. Se fosse possível ajustar instantaneamente a moeda à inflação, tornar-se-ia impossível coletar o imposto inflacionário. Na realidade, o reajuste instantâneo é impraticável; o máximo que se consegue é indexar a moeda pela taxa de inflação esperada. No modelo de Cagan discutido, isso equivale a substituir a expressão do déficit público financiado com expansão monetária por $\dot{M} = kP + M\pi^e$. Substituindo em (23) e combinando com (21) e (15) e supondo que o produto seja constante, obtemos a dinâmica da taxa esperada de inflação para essa economia

$$\dot{\pi}^e = \frac{b}{1-ab} (k/c) e^{a\pi^e}. \quad (32)$$

Respeitada a condição de estabilidade de Cagan qualquer que seja o déficit operacional **k** financiado pela expansão da moeda indexada, o resultado será uma hiperinflação.

⁷ Por outro lado, uma elevação do déficit público financiado com senhoriagem conduz a uma queda da taxa de inflação de estado estacionário, o que é necessário para gerar uma receita maior com o imposto inflacionário, de modo a cobrir um déficit agora mais alto.

⁸ Num regime megainflacionário em que **b** é função das expectativas, a memória inflacionária se encurta aceleradamente, uma vez que os agentes se adaptam muito rapidamente a inflação, tornando a economia muito ágil no processo de indexação. Assim, qualquer disparada da inflação, mesmo na presença de uma queda do déficit público, leva a uma fuga da moeda.

Esse foi o caso da hiperinflação húngara de 1946, a maior da história, embora não a mais violenta. Essa situação é semelhante também à vivida pelo Brasil após 1991, com a reintrodução na economia dos ativos confiscados pelo Plano Collor, com a diferença de que os títulos públicos não eram meio de troca.

Podemos então especular sobre esse ponto através do modelo abaixo, que não inclui uma equação de expectativas. Suponhamos uma economia com um déficit público financiado com emissão de base e expansão da dívida pública. O agregado monetário relevante é agora o M2, que é a soma da base (M) com o estoque de títulos públicos (T) em circulação. Então, sejam as equações

$$M2 = M + T \quad (33)$$

$$M2 = dPY \quad (34)$$

$$\dot{M2} = kPY + Ti \quad (35)$$

$$M/M2 = e^{-ai}, \quad (36)$$

onde d é a proporção do M2 sobre o PIB, i é a taxa nominal de juros paga pelos títulos públicos; a equação (35) representa a expansão do agregado monetário que é dada pelo déficit primário mais os juros da dívida pública, e a equação (36) é a relação existente entre a base e o estoque de M2 que se supõe decrescente na taxa de juros dado que os títulos são substitutos da base.

Tomando logs de (34), derivando em relação ao tempo, combinando com (35), usando (36) e (33) e supondo o PIB constante, obtemos a expressão que determina a taxa de inflação

$$(k/d) + (1 - e^{-ai}) i = \pi. \quad (37)$$

Nesta economia, a taxa de inflação cresce com a taxa de juros; ver Sargent e Wallace (1986). Esta é uma economia em que a taxa de inflação é elevada, existindo, portanto, um ativo remunerado que possui alta liquidez devido à intervenção do Bacen, sendo por isso capaz de ocupar o espaço da moeda convencional. Assim, o financiamento do déficit público através da colocação de títulos públicos aumenta a taxa de inflação através do crescimento da taxa de juros, a qual por sua vez incrementa o déficit público, realimentando o processo inflacionário indefinidamente. Isso se grava pela tendência de redução persistente da relação $M/M2$ provocada pela inflação crescente, que reduz a base de incidência do imposto inflacionário. A existência, portanto, de uma moeda indexada acaba por agravar os problemas de uma economia inflacionária⁹; ver Simonsen (1990).

Notemos que, sendo M2 uma fração fixa $1/d$ do PIB nominal, à medida em que a colocação de títulos T aumenta esses ativos ocupam o espaço da moeda convencional ($M/M2$ cai)¹⁰ – ainda que a taxa de juros seja constante –, dado que a maior quantidade de títulos gera a taxa de inflação necessária à sua absorção pelo sistema (supondo o PIB constante), criando a sua própria demanda. Logo não há, a priori, a necessidade de o Bacen garantir a liquidez dos títulos públicos – embora seja óbvio que essa necessidade existe, caso se deseje que o sistema financeiro opere continuamente sem atritos.

Uma conclusão interessante é que, como a moeda convencional não paga juros – enquanto os títulos públicos pagam –, não tendo assim impactos expansionistas sobre o déficit

⁹ Note que, nesse modelo, não há efeito deslocamento. Uma elevação da taxa de juros não gera uma recomposição das carteiras de ativos dos agentes privados. O efeito da elevação da taxa de juros é aumentar o déficit público e a taxa de inflação e, ao mesmo tempo, reduzir a demanda real por moeda e aumentar a demanda por títulos públicos, sem que para isto a quantidade real de títulos, ou $M2/P$, tenha crescido, já que $(\dot{M2}/M2) = \pi$. Ocorre apenas uma queda na relação $M/M2$, resultando na eliminação do papel da política monetária. Numa economia como esta, aumentar o compulsório sobre depósitos à vista é inflacionário.

¹⁰ Note que não é necessário a equação (36) ter a forma descrita para chegarmos a esta conclusão; podemos simplesmente supor que ela é uma fração que se altera no tempo. Assim, quanto maior a relação $M/M2$, maior a proporção de títulos usados para financiar o déficit público e, portanto, maior a taxa de inflação.

público, e a elevação da relação M/M2 reduz a taxa de inflação, deduz-se que a melhor tática é monetizar toda a dívida pública e acabar com a inflação; ver Pastore (1995).

Os resultados se alteram caso uma equação de expectativas adaptativas seja introduzida e a taxa de juros seja substituída pela inflação esperada; ver Simonsen (1990). Adotando os procedimentos algébricos anteriores, obtém-se a dinâmica das expectativas inflacionárias

$$(\dot{\pi}^e / b) = (k/d) - \pi^e e^{-a\pi^e} \quad (38)$$

Essa equação possui um mínimo em $\pi^e = 1/a$, que é igual a $[(k/d) - (1/ae)]$. Independentemente da condição de estabilidade de Cagan, assim como do valor do parâmetro de memória inflacionária b , uma hiperinflação ocorre se $(k/d) > (1/ae)$. Em caso contrário, há uma taxa de inflação baixa de equilíbrio estável e uma alta de equilíbrio instável. A existência de um taxa de equilíbrio é determinada pela magnitude do parâmetro a – a semi-elasticidade da demanda de moeda em relação às expectativas –, que se for muito elevado pode conduzir a uma hiperinflação, e pela proporção d de M2 demandada como fração do produto nominal. Assim, quanto menor esta fração, maior o primeiro termo da equação (38), e logo mais próxima a economia se encontra de uma instabilidade hiperinflacionária. Nesse modelo, a dívida pública ajuda a reduzir os riscos de uma hiperinflação, e, se o déficit primário k é eliminado, a economia converge gradualmente para o nível de taxa de inflação zero.

5. Expectativas Inflacionárias em um Contexto de Choques Heterodoxos Sucessivos

Suponhamos uma economia em a que demanda por moeda tenha se contraído continuamente devido à introdução sistemática de inovações financeiras, muitas delas motivadas pela aceleração inflacionária. Dessa forma, os estoques de base monetária e de meios de pagamentos reduziram-se sistematicamente, o que implicou uma queda continuada da semi-elasticidade custo da demanda por moeda, tornando-a juro-inelástica, o que gradativamente tornou a demanda por moeda e a curva LM verticais. Assim, o grau de monetização da economia desceu a um tal ponto que os agentes, pelo lado monetário, passaram a ser pouco influenciados pela elevação da taxa de inflação. No limite, a demanda de moeda se reduziria a uma equação de Cambridge. Isso faz a demanda agregada de bens da economia ser mais sensível às oscilações dos preços e da taxa de inflação, tornando a política de demanda através dos instrumentos monetários ineficiente para controle da inflação.

Por outro lado, diante de uma situação em que são aplicados choques heterodoxos sucessivos, a regra de formação de expectativas de Cagan perde qualquer sentido, e os agentes passam a apostar que a inflação se acelere constantemente depois do choque; ver Simonsen (1991). Sendo assim, consideremos o seguinte modelo, consistente com essas duas situações e com a hipótese da taxa natural de desemprego:

$$\pi = \pi^e + \gamma h, \quad \gamma > 0 \quad (39)$$

$$m = p + h \quad (40)$$

$$\dot{\pi}^e = C_n, \quad (41)$$

onde $h = y - \bar{y}$ é o hiato do produto, C_n é uma constante positiva, presumivelmente tanto maior quanto a ordem histórica n do choque, isto é, $C'_n > 0$, e todas as variáveis estão expressas em logaritmos. A equação (39) representa a curva de Phillips; (40), a equação quantitativa; e (41), a regra de formação de expectativas.

Suponhamos que, em $t = 0$, a taxa de inflação esperada e a oferta real de moeda sejam constantes, i.e., $\dot{\pi}^e = \mu = 0$. Nesse caso, o Banco Central quer e consegue manter o controle sobre a expansão monetária. A trajetória do produto é obtida a partir da combinação das

equações acima, integrando a equação de expectativas e em seguida resolvendo uma equação diferencial, cujo resultado é dado por:

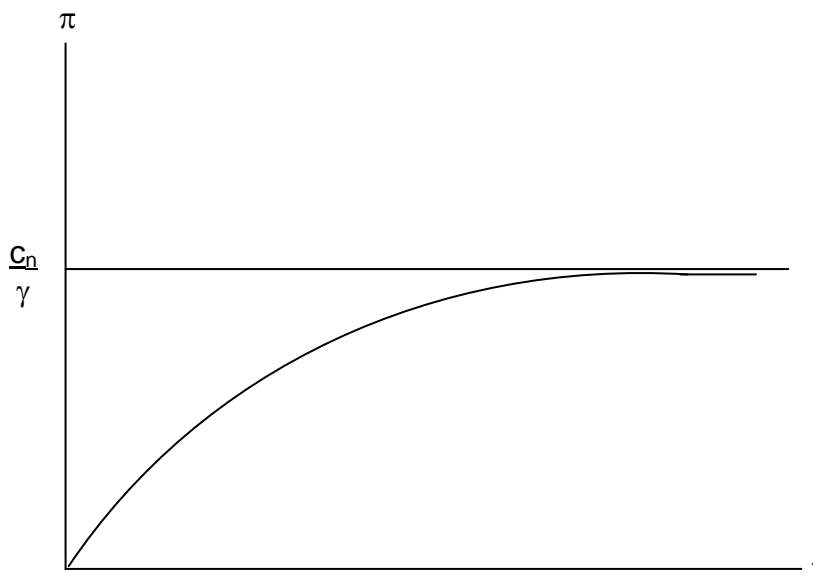
$$h(t) = ke^{-\gamma t} + \frac{C_n}{\gamma^2} - \frac{C_n}{\gamma} t \tag{42}$$

A partir dessa equação e sabendo que $\dot{h} = -\pi$, obtém-se a dinâmica da taxa de inflação dada por

$$\pi = \gamma ke^{-\gamma t} + \frac{C_n}{\gamma} . \tag{43}$$

Suponhamos que em $t = 0$ se faça um choque heterodoxo tal que a inflação caia a zero; e que $k < 0$. Pela equação (43), a inflação descreverá, após o choque, a trajetória indicada na figura 7. Dessa forma, movida pelas expectativas, a inflação após o choque gradativamente convergirá para o patamar de equilíbrio. E, como $C'_n(n) > 0$, o patamar de convergência será, a cada novo choque, progressivamente mais alto. Com esse comportamento das expectativas, a aplicação sucessiva de choques heterodoxos conduz à aceleração da taxa de inflação. Conseqüentemente, se a economia vive um regime de choques constante no estilo dos que foram aplicados à economia brasileira durante o período 1986-1991, a credibilidade dos planos e do governo se esvai, a inflação cresce aos saltos e se forma uma rota hiperinflacionária.

FIGURA 7: Dinâmica da Inflação após um Choque Heterodoxo



Pela equação (42), com uma situação tal como a descrita, o produto está em queda permanente. Então, se em meio à seqüência de choques implanta-se uma política monetária acomodatória de modo a interromper a queda do produto, *i.e.*, tal que $h = 0$, da equação (39) e usando o fato de que $\int_0^t \pi^e ds = C_n t$, temos que $\pi = \pi^e = C_n t$. Ou seja, a economia entra em uma trajetória hiperinflacionária (figura 8), enquanto o lado real da economia está em equilíbrio, dado que a moeda está endógena ($\mu = \pi$) para que $h = 0$.

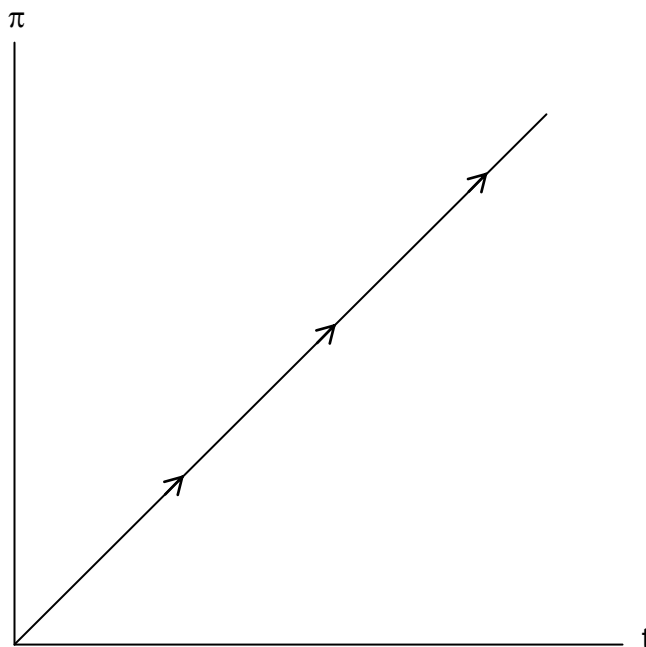
6. Modelo de Cagan com Expectativas Racionais

O exame da equação (19)¹¹ sugere um modo alternativo de formar expectativas; ver McCallum (1989). Tomando primeiras diferenças dos dois lados da equação menos do termo aleatório e rearranjando, obtemos

$$\pi_t = \frac{\Delta m_t}{1+a} + \frac{a}{1+a} \pi_{t+1}^e - \frac{\varepsilon_t}{1+a} \tag{44}$$

A equação (44) mostra que a taxa de inflação corrente é afetada pela taxa de expansão monetária presente e pela taxa de inflação esperada no presente para amanhã. Desde que o nível presente da taxa de inflação seja em parte determinado pela taxa de expansão monetária corrente, é razoável assumir que a inflação futura será afetada pelo crescimento monetário futuro, e assim por diante. Sob expectativas racionais, as expectativas são formadas a partir do modelo que descreve o comportamento atual da variável em questão.

FIGURA 8: Trajetória Inflacionária de Longo Prazo, dada uma Sucessão de Choques Heterodoxos



Para derivar as expectativas racionais da taxa de inflação futura, note que (44) implica que a inflação de amanhã será determinada por

$$\pi_{t+1} = \frac{\Delta m_{t+1} + a\pi_{t+2}^e}{1+a} - \frac{\varepsilon_{t+1}}{1+a} \tag{45}$$

Certamente, no período t os valores das variáveis do lado direito não serão conhecidos, mas para formar expectativas de π_{t+1} , precisamos apenas tomar esperanças sobre as variáveis do lado direito de (45). Isso pode ser feito tomando expectativas condicionadas ao conjunto de informações disponíveis em $t + 1$, *i.e.*, I_{t+1} e usando a lei das expectativas iterativas¹². Assim temos

¹¹ A equação (19) pode ser reescrita para $P_t = \frac{m_t}{1+a} + \frac{a}{1+a} P_{t+1}^e - \frac{\varepsilon_t}{1+a}$.

¹² Todos os métodos e soluções obtidas nesta seção repousam sobre o fato estatístico conhecido como lei das expectativas iterativas: seja Ω um conjunto de informação e seja ω um subconjunto desse conjunto. Então para qualquer variável aleatória x $E[E[x | \Omega] | \omega] = E[x | \omega]$. Heuristicamente, se alguém tem expectativas racionais e se

$$\pi_{t+1}^e = E[\pi_{t+1} | I_t] = \frac{E[\Delta m_{t+1} | I_t]}{1+a} + \frac{a}{1+a} E[\pi_{t+2} | I_t], \quad (46)$$

dado que $E[\varepsilon_{t+1} | I_t] = 0, \forall t$. Substituindo (46) em (44), obtemos¹³

$$\pi_t = \frac{\Delta m_t}{1+a} + \left(\frac{a}{1+a}\right) \frac{E_t[\Delta m_{t+1}]}{1+a} + \left(\frac{a}{1+a}\right)^2 E_t[\pi_{t+2}] - \frac{\varepsilon_t}{1+a}. \quad (47)$$

Avançando (47), tomando expectativas condicionadas sobre I_{t+2} e resolvendo recursivamente até o tempo T , obtemos a solução de expectativas racionais para o nível da inflação corrente

$$\pi_t = \frac{1}{1+a} \sum_{i=0}^T \left(\frac{a}{1+a}\right)^i E_t[\Delta m_{t+i}] + \left(\frac{a}{1+a}\right)^{T+1} E_t[\pi_{t+T+1}] - \frac{\varepsilon_t}{1+a}. \quad (48)$$

De (48) observamos que a inflação corrente depende das expansões monetárias esperadas para os períodos futuros e também da taxa de inflação esperada para o período $t + T + 1$. Para o primeiro termo convergir à medida que T tende para infinito, as expectativas de Δm não podem crescer muito rápido. Se as expectativas de Δm crescem a uma taxa mais lenta do que a do termo exponencial, a condição para que essa soma convirja é que a esperança do crescimento da expansão monetária seja menor do que $(1+a)/a$ por período. Assumimos, portanto, que a soma converge¹⁴.

Além disso, assumimos a condição terminal de que

$$\lim \left(\frac{a}{1+a}\right)^{T+1} E_t[\pi_{t+T+1}] = 0, \quad (49)$$

ou seja, que o termo envolvendo a taxa de inflação esperada terminal vá para zero no limite e que, dessa forma, as expectativas inflacionárias não se acelerem a uma taxa mais rápida do que $(1+a)/a$ por período. Assumimos, então, que a taxa de inflação esperada não explode, o que implica excluir a possibilidade de ocorrência de bolhas especulativas nas quais o nível da taxa de inflação corrente é determinado pelas expectativas das inflações futuras – *i.e.*, por profecias auto-realizáveis – no lugar dos fundamentos, que no nosso modelo são representados pelas expansões monetárias presente e futuras esperadas¹⁵.

Assim, a solução para a taxa de inflação corrente é dada por

$$\pi_t = \frac{1}{1+a} \sum_{i=0}^T \left(\frac{a}{1+a}\right)^i E_t[\Delta m_{t+i}] - \frac{\varepsilon_t}{1+a}. \quad (50)$$

Note que (50) satisfaz (49), assim ela é de fato uma solução para a equação (44). De acordo com (50), a inflação corrente é determinada pela expansão monetária corrente¹⁶ e pela seqüência dos crescimentos monetários futuros esperados, descontados para o presente com pesos decrescentes à medida que os valores se distanciam no futuro. A inflação presente é afetada, portanto, pelas expansões monetárias futuras esperadas. Assim, se for anunciado no

lhe pergunta como revisaria sua expectativa caso tivesse mais informações, a resposta deveria ser que essa pessoa estaria propensa a revisá-la, para mais ou para menos, de modo que a sua revisão fosse em média igual a zero. Aplicado ao conjunto de informação I_t , isso implica, em particular, que $E[E[x | I_{t+1}] | I_t] = E[x | I_t]$. A expectativa de hoje sobre a expectativa do próximo período da variável x é a mesma que a expectativa de hoje sobre x ; ver Blanchard e Fischer (1989).

¹³ Por uma questão de economia de espaço, passamos a usar a notação $E_t[x_{t+i}] \equiv E[x_{t+i} | I_t]$.

¹⁴ Caso se espere que a taxa de expansão monetária se acelere, *i.e.*, caso se espere que $E_t[\Delta m_{t+i}]$ cresça a uma taxa muito rápida, o nível da taxa de inflação corrente não será definido. Essa situação corresponde a uma fuga da moeda na expectativa de que a sua taxa de depreciação seja muito alta e crescente.

¹⁵ Não há, contudo, nada no modelo que assegure a ausência de bolhas especulativas. Ademais, existem muitas trajetórias da taxa de inflação consistentes com expectativas racionais. Virtualmente, (44) terá uma solução de bolha especulativa; ver Cysne e Simonsen (1995) e Blanchard e Fischer (1989).

¹⁶ Assumindo, é claro, que os agentes conheçam a expansão monetária corrente; assim $E_t(\Delta m_t) = \Delta m_t$.

presente que o crescimento monetário daqui a dois anos será maior do que o previamente esperado, a inflação presente começará a crescer. Parte do ajuste a um aumento esperado na expansão monetária ocorre anteriormente ao seu efetivo acontecimento.

Desse modo, se desejamos traçar uma trajetória esperada para Δm , podemos resolver (50) explicitamente para π . De forma equivalente, se especificarmos um processo para Δm , podemos obter um processo para π . Suponhamos então que uma alta da taxa de expansão monetária de Δm_0 para Δm_T seja anunciada no período τ e ocorra no período $T > \tau$. A partir de (50), podemos deduzir a trajetória de π_t dada por

$$\begin{aligned} \pi_t &= \Delta m_0, \text{ para } t < \tau, \\ \pi_t &= \Delta m_0 + a^{T-\tau} (\Delta m_t - \Delta m_0), \text{ para } \tau \leq t < T, \\ \pi_t &= \Delta m_T, \text{ para } t \geq T. \end{aligned}$$

A figura 9 apresenta as trajetórias da expansão monetária, da taxa de inflação e da variação dos saldos de moeda real antes e após o anúncio do choque monetário. A trajetória mostra que o anúncio de um aumento futuro da expansão monetária por si só aumenta o nível da inflação no presente e reduz os estoques de moeda real. A taxa de inflação começa a crescer lentamente a partir de τ e se estabiliza no seu nível mais alto B no período T , em que ocorre o aumento anunciado da oferta monetária. A inflação, portanto, começa crescendo antes mesmo do aumento da expansão monetária. Isso ocorre porque os agentes olham para a frente¹⁷; sabem que, nos períodos antecedentes à elevação do crescimento da oferta monetária, os demais agentes anteciparão o aumento da inflação e tentarão reduzir seus saldos de moeda real. Agindo assim, eles provocam a alta da taxa de inflação antes do aumento da expansão monetária. Trazendo essa lógica para o presente, os detentores correntes de moeda tentam reduzir seus saldos reais, empurrando desse modo a inflação para cima. Porém, uma alta não antecipada/esperada da expansão monetária provoca um salto da inflação de A para B no período T .

Uma diferença fundamental entre as soluções obtidas para a equação de inflação é que, enquanto sob expectativas adaptativas – equações (20), (27) ou (29) – o processo inflacionário é totalmente inercial, uma vez que a inflação corrente depende da expansão monetária corrente e das inflações passadas, sob a hipótese de expectativas racionais a inflação corrente não tem qualquer vínculo com o passado, estando relacionada apenas aos fundamentos esperados da economia.

A existência dessas duas soluções leva a distintas propostas de como enfrentar o problema inflacionário. Para Cagan, a inflação só poderia ser reduzida gradativamente¹⁸, o que é observável por (27), impondo a restrição de que a expansão da base é zero ($\mu = 0$). Então, resolvendo-se uma equação diferencial de primeira ordem, sob a hipótese de estabilidade de Cagan ($ab < 1$) a inflação esperada converge de forma gradual para zero¹⁹. Sob a hipótese de expectativas racionais, o processo inflacionário poderia ser estancado rápida e subitamente, bastando para isso que o governo anunciasse e o público acreditasse que as políticas monetária

¹⁷ Portanto, se o futuro tem impacto na inflação corrente é porque as expectativas afetam as variáveis correntes.

¹⁸ Cagan observa, em seu estudo, a possibilidade de que o público nos últimos meses da hiperinflação alemã estivesse esperando, com uma probabilidade diferente de zero, a ocorrência de uma reforma monetária. Caso a reforma de fato ocorresse, a dinâmica da inflação não mais seria governada pela equação (27). Assim, não é estritamente correto afirmar que, para Cagan, só seria possível reduzir a inflação de forma gradual.

¹⁹ A solução da equação (27) ou (29) é dada por $\pi^e(t) = \pi_0^e \exp t(-b/(1-ab))$. π^e converge para zero tão mais rapidamente quanto menor o estado inicial das expectativas inflacionárias π_0^e , e quanto mais próxima estiver a memória inflacionária ($1/b$) da semi-elasticidade juro da demanda por moeda (a). No caso de $ab > 1$ ou previsão perfeita, a solução diverge. Apesar do aperto monetário violento, é suficiente um pipoco dos preços para que se desencadeie uma escalada inflacionária puxada pelas expectativas. A revisão dos preços é tão acelerada que, mesmo em um ambiente de austeridade monetária, a inflação pode explodir, o que parece ser o caso quando ocorre uma bolha de preços.

e fiscal seriam alteradas de modo a garantir a estabilidade de preços. Pela equação (50), é suficiente que as expansões monetárias presente e futuras sejam zero, para que a inflação corrente em média também o seja.

Embora (50) seja uma solução para (44), ela não é a única. Ela foi derivada pela imposição da condição de transversalidade (49), o que significa que as expectativas não explodem muito rápido. Caso essa condição seja relaxada, são possíveis outras soluções. Assim, por exemplo, podemos ter a seguinte solução para (44)

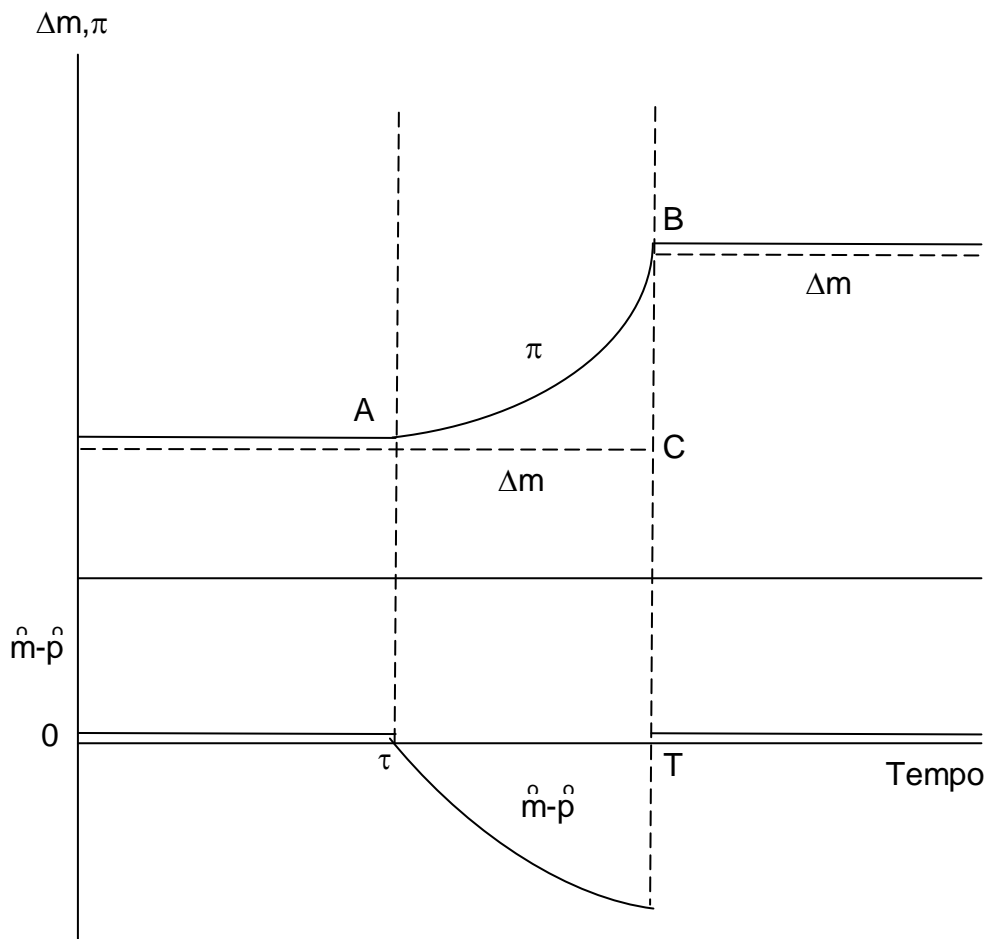
$$\pi_t = \frac{1}{1+a} \sum_{i=0}^T \left(\frac{1}{1+a}\right)^i E_t[m_{t+i}] + b_0 \left(\frac{1+a}{a}\right)^i, \tag{51}$$

onde b_0 é o desvio inicial de π_0 dos seus valores de fundamentos, isto é,

$$b_0 = \pi_0 - \frac{1}{1+a} \sum_{i=0}^T \left(\frac{a}{1+a}\right)^i E_t[m_{t+i}]. \tag{52}$$

Dado que $|a| < 1$, esta solução explode, como ocorre no modelo de Cagan; por essa razão esse componente é chamado “solução” de bolha; ver Blanchard e Fischer (1989), Obstfeld e Rogoff (1997), e Turnovsky (2000).

Figura 9: Efeitos sobre a Inflação e a Variação do Estoque Real de Moeda de um Aumento Antecipado na Expansão Monetária Nominal



Como já mencionado, a solução de bolha pode ser eliminada apelando-se para a estabilidade através da imposição da equação (49), o que deixa a solução dos fundamentos como a única solução estável. De fato, em um ambiente racional, não se espera a ocorrência de

soluções explosivas²⁰, nem de *sunspots*²¹. Muito embora, em contextos turbulentos como os vividos pela economia brasileira entre 1986 e 1994, a identificação ou determinação dos fundamentos se torne incerta, sob incerteza dos fundamentos a crença dos agentes fica nebulosa, o que mantém a possibilidade de bolhas e *sunspots* inesperadas, apenas porque os agentes acreditam que elas possam afetar as taxas futuras de inflação²². De fato, em um ambiente de hiperinflação/megainflação, a identificação de uma bolha é difícil porque intrincado é também determinar o valor dos fundamentos durante esse período. Na ausência de bolhas e sob a hipótese de expectativas racionais, a taxa de inflação deveria depender dos valores esperados das taxas futuras de expansão monetária, os quais se alteram de modo complexo nessas fases, especialmente durante os últimos estágios, quando é mais provável uma bolha inflacionária aparecer.

7. Transição para Expectativas Racionais

Quando se incorpora em um modelo a hipótese da taxa natural de desemprego e expectativas racionais, a política monetária não tem efeito sobre as variáveis reais. A hipótese de expectativas racionais assume que os agentes econômicos aprenderam de seus erros de previsão passados, porém ignora o fato de existir um período de transição durante o qual novas informações são combinadas com outras velhas na formação de suas novas crenças.

Embora as previsões ótimas do público sobre a taxa de inflação convirjam para o equilíbrio de expectativas racionais, no ínterim essas previsões comportam-se como expectativas adaptativas com coeficientes de expectativas que variam no tempo em função do comportamento da política monetária. Desta forma, através de uma escolha adequada da trajetória de execução da política monetária, as autoridades podem atingir níveis desejados de atividade econômica durante a fase de transição; ver Taylor (1975).

Assim, uma especificação para a curva de Phillips que assuma uma fase de transição para expectativas racionais é dada pela expressão

$$\pi_t = \phi\pi_t^e + (1 - \phi)\pi_{t-1} + \lambda(\ln Y_t - \ln \bar{Y}_t) + \varepsilon_t, \quad 0 < \phi < 1. \quad (53)$$

Nessa expressão, π_t^e são expectativas inflacionárias formadas de modo racional e ϕ é um componente inercial estritamente menor do que 1. Assim, assume-se a existência de um elo entre as inflações passadas e futuras através dos efeitos operando por meio das expectativas (ver Romer, 2001), o que elimina a hipótese da não-neutralidade da moeda.

Outra abordagem que, embora não mencione explicitamente um período de transição entre a regra adaptativa e a racional, chega a resultados similares é a apresentada em Taylor (1978) e (1999). Nesses artigos, o autor mostra que, com contratos salariais justapostos, a hipótese de expectativas racionais não implica neutralidade da política monetária esperada, tal como preconizado pela hipótese aceleracionista de Friedman-Phelps de que a curva de Phillips é vertical no longo prazo – pelo menos como uma aproximação de primeira ordem.

²⁰ Se a taxa de inflação está sujeita a uma condição terminal, que ocorrerá em algum momento futuro, logo, dado que a inflação deve ser igual ao seu valor de estado estacionário no tempo terminal, a bolha deve ser igual a zero nesse momento. Então, por *backward induction* a bolha deve ser zero sempre; logo não podem existir bolhas.

²¹ O termo *sunspots* é uma variável – e.g., um choque de natureza não relacionada com o problema em questão – que afeta o equilíbrio apenas porque os indivíduos acreditam que ela ocorrerá.

²² Da mesma forma que permanece em aberto a possibilidade de ocorrer uma bolha que se rompe em um dado momento. Isto é, uma pequena perturbação nos fundamentos resulta em um *crash* induzido por uma bolha, o que é representado em nosso contexto pelos saltos contínuos da taxa de inflação derivados dos choques de oferta e dos fundamentos. À medida que a bolha cresce, os fundamentos não suportam a trajetória seguida pela taxa de inflação e começam a indicar que é necessário corrigi-lo. Em algum momento, essa correção torna-se eminente, e a bolha estoura.

A idéia básica é a de que os contratos salariais durem um ano, mas que metade dos contratos seja negociada em janeiro e outra em julho. Suponhamos que a unidade de medida do tempo seja de semestre e que s_t seja o log do contrato salarial acertado em t para prevalecer nos períodos t e $t + 1$. Assim, um modelo de determinação do contrato salarial é dado por

$$s_t = bs_{t-1} + ds_{t+1}^e + \gamma(bh_t^e + dh_{t+1}^e) + \varepsilon_t, \quad (54)$$

onde b , d e γ são positivos, ε_t é um termo aleatório e h_t^e é o hiato do produto esperado ou excesso de demanda agregada para t e $t + 1$. Todos os valores esperados são condicionados às informações disponíveis em $t - 1$. A equação (54) estabelece que o contrato salarial negociado no início de cada período semianual depende de três fatores: (i) do contrato estabelecido no período anterior; (ii) do contrato esperado a ser estabelecido no próximo período; (iii) de uma média ponderada do hiato do produto esperado durante os próximos períodos t e $t + 1$. Desde que, por hipótese, s_t venha a prevalecer por dois períodos, então firmas e sindicatos que observem um ajuste de salário em t atentarão às taxas salariais a de fato prevalecer em t e $t + 1$. Assim, s_{t-1} e s_{t+1}^e são incluídos na equação de determinação do contrato salarial²³. Os coeficientes b e d refletem as elasticidades em relação aos contratos passados e futuros, por hipótese $b + d = 1$, e não necessariamente $b = d = 1/2$. Assim é possível ter um espectro de hipóteses sobre a determinação de contratos variando entre os extremos de puro *backward looking* ($b = 1$) a puro *forward looking* ($d = 1$).

O modelo completo é formado pelas seguintes equações em logs

$$h_t = y_t^e - y_t^p \text{ (hiato do produto),}$$

$$p_t = w_t + u_t \text{ (regra de mark-up onde } E_{t-1}[u_t] = 0),$$

$$m_t = h_t + p_t - v_t \text{ (equação de demanda por moeda representada pela equação quantitativa),}$$

$$m_t = gp_t \text{ (regra log-linear de política monetária),}$$

onde m_t , w_t e v_t são, respectivamente, os logs da oferta monetária, do salário nominal agregado, e um choque aleatório; todas as variáveis são medidas como desvio da tendência; g é a taxa de expansão monetária. Daí obtemos a seguinte equação de demanda agregada

$$h_t = -\beta w_t + v_t, \quad (55)$$

onde $\beta = 1 - g$ é um parâmetro de política indicando o grau de acomodação da demanda agregada às variações salariais.

Como w_t é um agregado dos contratos salariais s_t e s_{t-1} prevalecentes no tempo t , podemos tomar a média geométrica desses contratos; temos então

$$w_t = 0.5(s_t + s_{t-1}). \quad (56)$$

Substituindo (56) em (55), avançando, tomando expectativas, substituindo em (54), procedendo a algumas simplificações e tomando expectativas condicionais, obtemos a seguinte equação de diferenças finitas de segunda ordem

$$ds_{t+1}^e - cs_t^e + bs_{t-1}^e = 0, \quad (57)$$

onde

$$c = (1 + 0.5\gamma\beta)/(1 - 0.5\gamma\beta).$$

Essa equação possui uma solução de *saddle path*. Para ser estável, é preciso impor como condição inicial que a constante associada à raiz explosiva seja zero. Assim obtemos uma solução geral $s_t^e = A_1 r^t$ e, retirando esperança, temos

$$s_t = rs_{t-1} + \varepsilon_t \quad (58)$$

onde

²³ Os contratos estabelecidos antes de $t - 1$ e depois de $t + 1$ não são incluídos na equação porque não se justapõem com o contrato corrente.

$$r = \frac{c - (c^2 - 4d(1-d))^{1/2}}{2d} \quad (59)$$

A partir de (56) e usando (58), obtemos a equação para o salário médio w_t dada por

$$w_t = rw_{t-1} + 0.5(\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}), \quad (60)$$

que também representa a equação de preços, dado que $p_t = w_t$. Combinando linearmente h_t e h_{t-1} , obtemos a dinâmica do hiato do produto

$$h_t = rh_{t-1} - 0.5\beta(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}) + (v_t - rv_{t-1}). \quad (61)$$

Da expressão do parâmetro r – que caracteriza o grau de persistência do comportamento do salário agregado –, podemos determinar de que forma as dinâmicas dos salários, preços e produto dependem da política de demanda agregada (β), da sensibilidade dos salários ao excesso de demanda agregada (γ) e do grau de *forward looking* prevalecente na economia (d). Verifica-se por (59) que o grau de persistência dos salários depende de quão acomodaticia é a política monetária em relação aos ajustes nos contratos salariais. Essa dependência é capturada pela relação entre r e β – quanto menor é β , *i.e.* quanto mais acomodaticia a política monetária, maior é r , *i.e.*, mais persistentes as flutuações de salários e preços²⁴; conseqüentemente, maior é o impacto inflacionário, passando as oscilações no hiato do produto a depender cada vez mais da ocorrência de choques intermitentes de oferta²⁵. No limite $\gamma = 1$ e $\beta = 0$ e assim qualquer variação salarial é acomodada pelo aumento da oferta monetária.

Destarte, a presença de um déficit público permanente financiado – em parte – com emissão monetária torna as flutuações de salários e preços persistentes, ainda que sob a hipótese de expectativas racionais. Logo um β pequeno devido ao déficit público implica elevados níveis de instabilidade inflacionária ao longo da trajetória dos salários agregados²⁶. Contudo, como baixos valores de β resultam em pequenas flutuações do hiato do produto (ver equação (55)), a instabilidade salarial traz em contrapartida uma estabilidade do produto real e do emprego – que é o *tradeoff* existente entre inflação e emprego.

É interessante distinguir a diferença entre o impacto dos contratos salariais e os efeitos das expectativas sobre esse *tradeoff*. Antes de tudo, lembremos que d mede o grau de *forward looking* dos agentes – quanto menor d , mais a determinação dos contratos salariais se baseia em dados passados, *i.e.*, maior a inércia. Pela equação (59), baixos valores de d estão associados a altos valores de r , o que fica mais claro com a figura 10²⁷. Assim, quanto mais *backward looking* as determinações dos salários, maior a persistência ou a inércia do salário agregado, para um dado nível de acomodação da política monetária e de sensibilidade dos contratos salariais às pressões do nível de desemprego.

De outra parte, *coeteris paribus*, um aumento no grau de acomodação da política monetária para um dado grau de *forward looking* aumenta a persistência de salários e preços. De outro lado, a manutenção de um dado grau de persistência requer um maior grau de *forward looking* dos agentes nas negociações salariais. Pelo formato das curvas, se o grau de *forward looking* ultrapassa $d = 0.5$, um aumento em d provoca uma queda substancial na persistência salarial. Por outro lado, a estabilidade do *tradeoff* entre salário e produto depende de d , porque o grau de *forward looking* aumenta os efeitos da demanda sobre os salários, melhorando o

²⁴ Isto porque $dr/d\beta = [(\partial r/\partial c < 0)(\partial c/\partial \beta > 0)] < 0$.

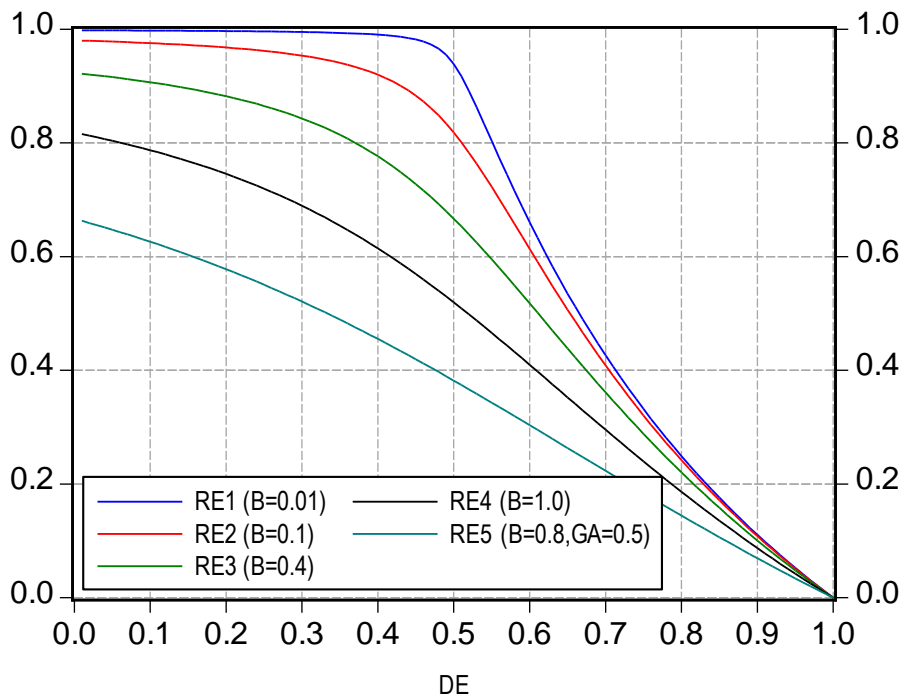
²⁵ Pela equação (55), a variância de h_t é dada por $V(h_t) = \beta^2 V(w_t) + \sigma_v^2$, e por (60) a variância dos salários e preços é dada por $V(w_t) = [0.25/(1-r^2)]\sigma_\varepsilon^2$.

²⁶ Note que pela equação de variância dos salários a política monetária passiva torna a volatilidade de preços e salários muito elevada ($r \approx 1$) na presença de revisões salariais constantes.

²⁷ As curvas foram desenhadas com $\gamma = 0.2$, à exceção da curva RE6, para a qual $\gamma = 0.5$.

*tradeoff*²⁸. Isso corresponde à intuição de que quanto mais *forward looking* as negociações dos contratos salariais, maior o impacto da política de demanda agregada sobre os salários. Portanto, as flutuações de demanda para estabilização da inflação podem ser menores e não precisam ser tão longas²⁹.

FIGURA 10: Persistência de Salários (RE) vs Grau de Forward Looking (DE)



Para finalizar, vale a pena ter em conta que nesse modelo, ainda que a expansão monetária seja zero, ($g = 0, \beta = 1$) a persistência de salários e preços permanece, bem como a volatilidade dessas variáveis e do produto. A volatilidade do produto, ao contrário, se reduz com uma política monetária que acomode todas as flutuações dos salários. A persistência só desaparece no caso de os agentes serem totalmente *forward looking* ($d = 1, r = 0$); com isso a dinâmica de salários e produto passa a não mais depender do passado, apenas de choques aleatórios vindos do lado da oferta, o que se reflete sobre a redução das suas respectivas volatilidades.

Outra forma de abordar a questão da transição é através da convergência do processo de aprendizado de mínimos quadrados ordinários (OLS) para a solução de expectativas racionais conforme proposto Marcet e Sargent (1989a); ver também Evans e Honkapohja (1999) e (2001). O modelo não estocástico de partida consiste de duas equações

$$P_t = \lambda E_t [P_{t+1}] + \gamma m_t, \quad 0 < \lambda < 1, \quad 0 < \gamma, \quad (62)$$

$$m_t = \theta m_{t-1} \xi \pi_t, \quad 1 \leq \theta \leq \lambda^{-1}, \quad \xi > 0, \quad (63)$$

$$m_0 \text{ dado e, } P_t, m_t \geq 0.$$

²⁸ Isso decorre do fato de que $(\partial r / \partial d) < 0$, logo a persistência dos salários se reduz com o aumento do grau de *forward looking*.

²⁹ O grau de *forward looking* também se reflete na estabilização do produto quando ocorrem choques inesperados de oferta ou de demanda, porque a baixa persistência de salários e preços faz os choques serem absorvidos mais rapidamente e o produto voltar para a sua trajetória de estado estacionário quase imediatamente – o que não ocorre se r for suficientemente grande para que o retorno ao equilíbrio ocorra de forma gradual, seguindo a trajetória de uma equação estável de primeiras diferenças.

Esta é uma versão do modelo de Cagan que estabelece que o governo financia uma fração ξ constante do déficit público operacional com emissão monetária. O estoque inicial de moeda m_0 está dado. Com um mecanismo complementar de formação de expectativas $E_t \pi_{t+1}$, o modelo determina as seqüências de equilíbrio para $\{P_t, m_t\}_{t=0}^{\infty}$.

Impondo expectativas racionais ou previsão perfeita, temos

$$E_t [P_{t+1}] = \beta_t P_t, \text{ onde } \beta_t = P_{t+1} / P_t. \quad (64)$$

Substituindo (64) em (62) e usando (63) e rearranjando, produz-se a seguinte restrição sobre as seqüências de equilíbrio:

$$\beta_{t+1} = (\lambda^{-1} + \theta - \xi\gamma\lambda^{-1}) - \theta\lambda^{-1} \cdot \frac{1}{\beta_t}. \quad (65)$$

Desde que o déficit satisfaça $\xi < \xi_{\max} = (\lambda/\gamma)[\theta + \lambda^{-1} - 2(\theta\lambda^{-1})^{1/2}]$, existem duas soluções estacionárias de (65), denotadas por $\beta_1^* < \beta_2^*$, como indica a figura 11³⁰. Tomando qualquer valor inicial β_0 para β_t , desde que $\beta_0 \in (\beta_1^*, \lambda^{-1})$, existe um ponto fixo mais baixo de (65) β_1^* , e λ^{-1} é o valor de β tal que por (62) os saldos reais demandados são zero. O ponto fixo mais alto é estável, sendo o atrator de todas as trajetórias que começam em $\beta_0 \in (\beta_1^*, \lambda^{-1})$. Apenas se em $t = 0$ $\beta_0 = \beta_1^*$, o sistema pode atingir a taxa baixa de equilíbrio inflacionário. Assim, existe um *continuum* de equilíbrios indexados pertencentes ao intervalo de β_0 tais que, exceto no caso em que $\beta_0 = \beta_1^*$, todos os demais equilíbrios convergem para a taxa de inflação mais alta de equilíbrio estacionário β_2^* . Desse modo, qualquer seqüência $\{\beta_t\}_{t=0}^{\infty}$ que satisfaça (65) com $\beta_0 \in (\beta_1^*, \lambda^{-1})$ é um equilíbrio, tal que todos têm a propriedade que $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_t = \beta_2^*$.

Pela figura (11), a estática comparativa no ponto estacionário β_1^* é clássica no sentido de que aumentos no déficit financiados por criação monetária elevam o valor de β_1^* , dado que um aumento no déficit ξ desloca a curva β_{t+1} para cima. Na taxa de inflação alta β_2^* , a estática comparativa é perversa, um aumento no déficit reduz a taxa alta de inflação de equilíbrio estacionário. A figura (11) indica que todo o *continuum* de equilíbrios converge para a taxa de inflação mais alta.

Suponhamos agora que ao sistema formado pelas equações (62) e (63) se junte o mecanismo de aprendizado de OLS dado por

$$E_t [P_{t+1}] = \beta_t P_t, \quad (66)$$

onde

$$\beta_t = \left[\sum_{s=1}^{t-1} P_s^2 \right]^{-1} \left[\sum_{s=1}^{t-1} P_s P_{s-1} \right]. \quad (67)$$

Na equação (67), o coeficiente β_t é usado para formar expectativas a partir de uma regressão linear de P_s sobre P_{s-1} usando dados até $(t-1)$. Suponhamos também que as expectativas dos agentes sejam dadas pela regra tempo-invariante

$$E_t P_{t+1} = \beta P_t, \quad \text{para todo } t, \quad (68)$$

³⁰ As raízes características da equação (65) são dadas por $(\beta_1^*, \beta_2^*) = \{(\lambda^{-1} + \theta - \gamma\xi\lambda^{-1}) \pm [(\lambda^{-1} + \theta - \gamma\xi\lambda^{-1})^2 - 4\theta/\lambda]^{1/2}\}/2$. As raízes satisfazem $\theta < \beta_1^*$, $\beta_2^* < \lambda^{-1}$. Impondo que $\theta \geq 1$ e $\xi > 0$, assegura-se que os únicos pontos que são limites potenciais do modelo envolvam taxas de inflação superiores à unidade.

onde β é algum número arbitrário. Quando as expectativas dos agentes são dadas por (68), as equações (62) e (63) podem ser resolvidas gerando os seguintes resultados

$$P_t = \gamma / (1 - \gamma\beta) m_t, \tag{69}$$

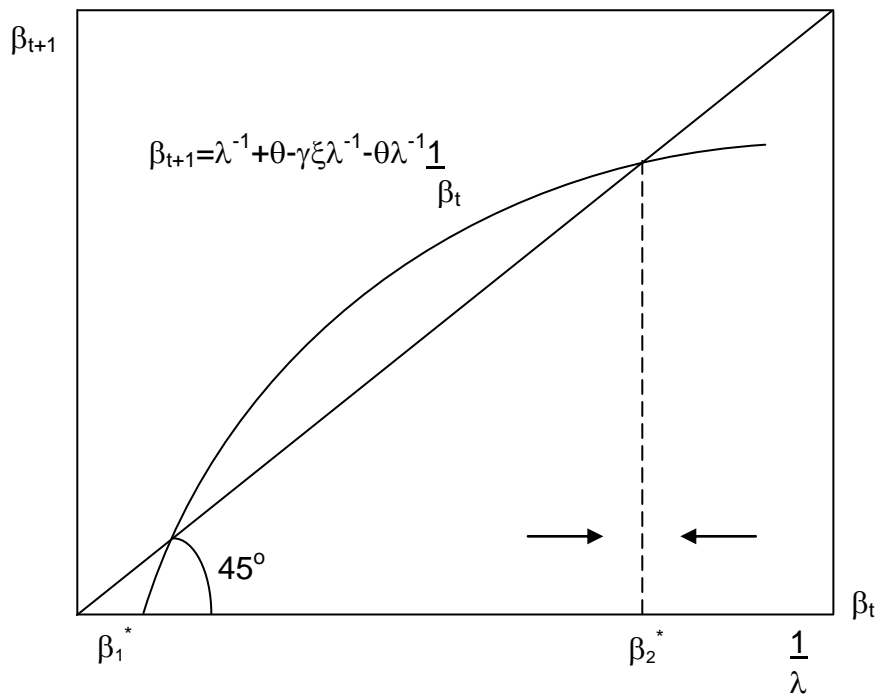
$$m_t = S(\beta) m_{t-1} \tag{70}$$

e

$$P_t = S(\beta) P_{t-1}, \text{ onde } S(\beta) = [(1 - \lambda\beta) / (1 - \lambda\beta - \gamma\xi)]\theta. \tag{71}$$

Para essas equações fornecerem uma solução a $\{P_t, m_t\}_{t=0}^{\infty}$, é necessário que $\beta < (1/\lambda)$ e $\beta < (1 - \gamma\xi) / \lambda$, para que P_t e m_t sejam não-negativos, caso contrário não existe equilíbrio. Um equilíbrio estacionário ou um equilíbrio tempo-invariante de expectativas racionais, que é um ponto fixo de S , é dado por uma regra da forma $E_t P_{t+1} = \beta^*$, tal que $\beta^* = S(\beta^*)$ ³¹. A função S está plotada na figura (12), e, pela primeira e segunda derivadas de (71), verifica-se que S é convexa.

FIGURA 11: Dinâmica de β_{t+1} (Taxa de Inflação) com Expectativas Racionais



Da equação (71) segue que

$$S(\beta) - \beta = \lambda \left\{ \frac{\beta^2 - (\theta + \lambda^{-1} - \xi\gamma\lambda^{-1})\beta + \theta\lambda^{-1}}{1 - \lambda\beta - \xi\gamma} \right\}. \tag{72}$$

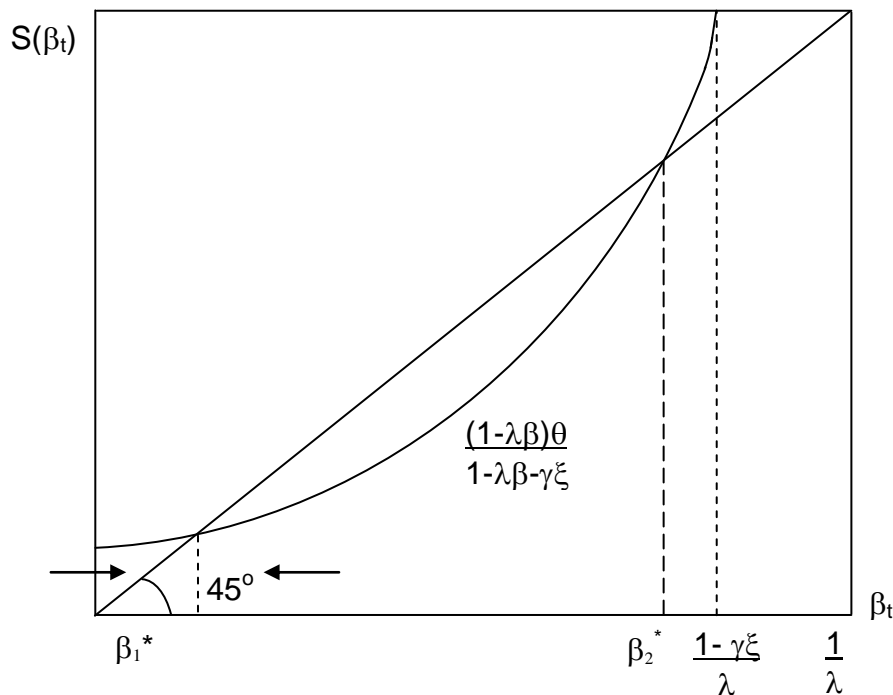
Esta equação $S(\beta) - \beta = 0$ possui duas soluções idênticas a β_1^* e β_2^* , que são os dois pontos possíveis de (65). No entanto, o ponto fixo β_1^* é estável sob iterações de $S(\cdot)$, enquanto o outro ponto fixo é instável. O operador S governa assim a convergência do esquema de aprendizado de LS. Deste modo, um equilíbrio sob aprendizado de OLS é um conjunto de seqüências não negativas para $\{\beta_t, P_t, m_t\}_{t=0}^{\infty}$ que satisfaz (62), (63), (66) e (67).

³¹ A razão dessa definição é que, pela consistência interna do modelo $E_t P_{t+1} = P_{t+1} = \beta P_t$ e $P_{t+1} = S(\beta) P_t$, logo $\beta = S(\beta)$.

O equilíbrio estacionário de expectativas racionais, apresentado acima, é consistente com expectativas racionais porque é atingido instantaneamente, mas não é com aprendizado, dado que a convergência para o equilíbrio não é imediata. Com aprendizado, a estimativa $\hat{\beta}$ muda a cada período até convergir para o verdadeiro β , que é o parâmetro de expectativas racionais. Assim, enquanto com expectativas racionais os agentes conhecem os parâmetros do modelo, há com aprendizagem uma transição onde os parâmetros vão se alterando até atingir a solução de expectativas racionais.

Intuitivamente, a dinâmica do modelo pode ser descrita supondo que a melhor previsão para o período seja a realização do período anterior. Isto é, suponhamos que P_t seja Markov. Assim, em $(t - 1)$, usando as equações (62), (63), (66) e (67), obtemos $\hat{\beta} = \beta_{t-1}$ e $E_{t-1}[P_t] = \beta_{t-1}P_{t-1}$, a solução para P_t ; em t , $\hat{\beta} = \beta_t$, então $E_t[P_{t+1}] = \beta_t P_t$ resolve o sistema e obtém P_{t+1} ; e assim por diante. Existe, deste modo, uma relação entre o presente e o passado, porque os agentes estão usando mínimos quadrados recursivos (RLS). Não há relação de dependência. A cada período, eles acrescentam uma nova informação e rodam a regressão. Desta forma, o β_t estimado hoje guardará uma relação com β_{t-1} , porque é com os mesmos dados acrescidos de mais uma informação.

FIGURA 12: Dinâmica de β_t (Taxa de Inflação) sob Aprendizado de OLS



Analisando o sistema formado pelas equações (62), (63), (66) e (67), temos

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \frac{1}{t} R_{t-1}^{-1} P_{t-2} [P_{t-1} - \beta_{t-1} P_{t-2}], \tag{73}$$

$$R_t = R_{t-1} + \frac{1}{t} [P_{t-1}^2 - R_{t-1}]. \tag{74}$$

A equação (74) é derivada a partir de (67), usando o fato de que

$$R_t = \sum_{s=1}^{t-1} (P_{s-1})^2 - R_0.$$

Para iniciar o sistema formado em (62), (63), (73) e (74) são necessárias *priors* na forma de valores iniciais para β_0 e R_0 , como também se requer o valor inicial para m_0 . Resolvendo as equações acima para obter (69), (70) e (71) com β indexado ao tempo e substituindo em (73) e rearranjando, tem-se

$$\beta_t = \beta_{t-1} + g_{t-1} \left[\frac{1 - \lambda\beta_{t-2}}{1 - \lambda\beta_{t-1}} S(\beta_{t-1}) - \beta_{t-1} \right], \quad (75)$$

$$g_{t-1} = \frac{P_{t-2}^2}{R_0 + \sum_{j=1}^{t-1} P_{s-1}^2}. \quad (76)$$

O aprendizado de OLS é governado por (75), que difere de serem simples iterações de $S(\cdot)$ devido à presença do termo g_{t-1} e do termo $(1 - \lambda\beta_{t-2})/(1 - \lambda\beta_{t-1})$, respeitada a condição $\beta < (1 - \gamma\xi)/\lambda$. A equação (75) pode ser rescrita para

$$\beta_t = (1 - g_{t-1})\beta_{t-1} + g_{t-1} \frac{1 - \lambda\beta_{t-2}}{1 - \lambda\beta_{t-1}} S(\beta_{t-1}). \quad (77)$$

De (76) segue que g_{t-1} obedece à condição $0 < g_{t-1} < 1$. A equação (77) pode ser comparada com a forma relacionada (ver Marcet e Sargent, 1989a)

$$\beta_t = (1 - g_{t-1})\beta_{t-1} + g_{t-1} S(\beta_{t-1}). \quad (78)$$

Por (77), em cada período as crenças sobre β_t são obtidas ajustando β_{t-1} em direção de $S(\beta_{t-1})$, por uma pequena magnitude. As iterações sobre $S(\cdot)$ ocorrem lentamente, dado que β_t é uma combinação linear convexa entre $S(\beta_{t-1})$ e β_{t-1} .

Somando e subtraindo $g_{t-1}S(\beta_{t-1})$ da equação (75) e rearranjando, obtemos a verdadeira dinâmica de β_t dada por

$$\beta_t = [\beta_{t-1} + g_{t-1}(S(\beta_{t-1})) - \beta_{t-1}] + \left[g_{t-1} \frac{\lambda S(\beta_{t-1})}{1 - \lambda\beta_{t-1}} (\beta_{t-1} - \beta_{t-2}) \right]. \quad (79)$$

O primeiro termo do lado direito entre colchetes de (79) é o termo usual dos mecanismos de OLS, e o segundo termo em colchetes é um termo adicional que aparece no modelo devido à razão $(1 - \lambda\beta_{t-2})/(1 - \lambda\beta_{t-1})$ em (75). Adotando procedimentos usuais para determinação da estabilidade de equações diferenciais através de aproximações de Taylor de (79) em torno de β_t^* , prova-se que, dadas certas condições, β_1^* é estável e β_2^* instável; ver Marcet e Sargent (1989a).

Como vimos, o processo de aprendizado de OLS converge para a solução de expectativas racionais. Assim, quando $t \rightarrow \infty$, uma pequena variação na amostra não altera significativamente a estimativa de β_t de período para período. Da mesma forma, pela lei dos grandes números, quando t é muito grande, o segundo termo da equação (73) tende para zero e, nesse caso, β_t converge para β_{t-1} . Assim, $\beta_t = \beta_{t-1}$, $\beta_{t+1} = \beta_t = \beta_{t-1}, \dots = \beta$. Conseqüentemente, β_t converge para um ponto fixo β de expectativas racionais.

Por outro lado, a dinâmica sob aprendizado de OLS, se o equilíbrio existe, converge para a taxa de inflação, que é a taxa baixa de equilíbrio de expectativas racionais. Neste equilíbrio, a estática comparativa é clássica: um aumento no déficit público permanente financiado com emissão monetária aumenta a taxa de inflação estacionária. Sob previsão perfeita, os equilíbrios deslizam no lado errado da curva de Laffer, o que explica processos mega e hiperinflacionários, segundo Sargent e Wallace (1987). Para déficits suficientemente próximos do déficit máximo sustentável sob expectativas racionais, pode ocorrer que não exista equilíbrio sob aprendizado de OLS, mesmo quando há um *continuum* de equilíbrios de expectativas racionais.

8. Aspectos Empíricos sobre a Estimação da Demanda por Moeda, Testes sobre a Regra de Formação de Expectativas Inflacionárias e sobre a Ausência de Bolhas Especulativas e *Sunspots*

Como mencionamos nas seções 3, 5 e 6 a explicação de Cagan sobre as hiperinflações repousa sobre a demanda por moeda real – equação (18) –, que pode ser rescrita como

$$\log \frac{M}{P} = a\pi_t^e + \gamma Y + \psi + \varepsilon_t, \quad a < 0, \gamma > 0, \quad (80)$$

onde ψ é um parâmetro e Y (PIB) está constante no tempo. A variável de expectativas não observada π_t^e é um polinômio de lags dos valores presente e passados das taxas observadas de inflação, com pesos geometricamente declinantes, dado pela equação (3), aqui rescrita como

$$\pi_t^e = (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \pi_t = (1-\lambda) \left[\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda L)^i \right] \pi_t = \frac{1-\lambda}{1-\lambda L} \pi_t, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (81)$$

Tomando diferenças de (80), obtemos que a taxa de inflação está relacionada à taxa de expansão da oferta monetária através da expressão $\mu_t = \pi_t + a(\pi_t^e - \pi_{t-1}^e) + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$, (81'), que combinada com (81) e assumindo que a função geradora de lags é inversível e resolvendo para a taxa de inflação produz a expressão

$$\pi_t = \frac{\frac{1-\lambda L}{1+a(1-\lambda)}}{1 - \left[\frac{a(1-\lambda)}{1+a(1-\lambda)} \right] L} \mu_t + \frac{\left[\frac{1-\lambda L}{1+a(1-\lambda)} \right] (1-L)}{1 - \left[\frac{a(1-\lambda)}{1+a(1-\lambda)} \right] L} \varepsilon_t, \quad (82)$$

onde se assume que $\left\{ \frac{a(1-\lambda)}{1+a(1-\lambda)} \right\} < 1$. De acordo (82), a taxa de inflação é determinada por valores passados da taxa de expansão monetária e dos valores defasados dos distúrbios da demanda por moeda. Por (82), a taxa de inflação presente será correlacionada com os valores presente e passados dos erros aleatórios da equação de demanda por moeda, salvo se alguma restrição particular for imposta sobre μ_t . Cagan estimou seu modelo substituindo (81) em (80), chegando à equação

$$\log(M/P) = a(1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \pi_{t-i} + \gamma Y + \psi + \varepsilon_t. \quad (83)$$

Como o modelo foi estimado por OLS, mas existe correlação entre π_t e os valores correntes e passados de ε_t , então as estimativas não são consistentes.

Por outro lado, as expectativas não são necessariamente assumidas como racionais. Ou seja, assume-se que o público forma expectativas da inflação de acordo com (81), enquanto a inflação evolui de acordo com (82). Assim, as previsões da inflação futura gerada por (82) serão diferentes das expectativas de inflação do público, as quais deverão ser sistematicamente diferentes das previsões de inflação geradas pelo modelo, salvo se algumas restrições forem impostas sobre o processo estocástico gerador dos μ 's. Logo é possível assumir que o público não seja capaz de prever a inflação tão bem como o modelo faz; ver Sargent e Wallace (1973a).

Suponha agora que o horizonte de previsão seja de um período, assim π_t^e é a taxa de inflação que o público espera em t que prevaleça em $t+1$, i.e., π_{t+1} . A hipótese de que as expectativas sejam racionais é imposta, requerendo que $\pi_t^e = E_t \pi_{t+1}$.

Assim, temos

$$\pi_t = \mu_t - aE_t \pi_{t+1} + aE_{t-1} \pi_t - \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}. \quad (84)$$

Adotando os mesmos procedimentos usados na seção 6, obtemos a equação da inflação esperada para $t+1$ dada por

$$E_t \pi_{t+1} = \frac{1}{1-a} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-a}{1-a} \right)^{j-1} E_t \mu_{t+j} - \frac{1}{1-a} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-a}{1-a} \right)^{j-1} (E_t \varepsilon_{t+j} - E_t \varepsilon_{t+j-1}) \quad (85)$$

Impondo a condição terminal (49), obtemos a expressão que descreve evolução da inflação

$$\begin{aligned} \pi_t = & \mu_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-a}{1-a} \right)^j E_t \mu_{t+j} - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-a}{1-a} \right)^j E_{t-1} \mu_{t+j-1} - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-a}{1-a} \right)^j (E_t \varepsilon_{t+j} - E_t \varepsilon_{t+j-1}) \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-a}{1-a} \right)^j (E_{t-1} \varepsilon_{t+j+1} - E_{t-1} \varepsilon_{t+j-2}) - \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}. \end{aligned} \quad (86)$$

Dado que $a < 0$, então $0 < [-a/(1-a)] < 1$, o que torna possível que as somas infinitas em (86) convirjam³².

A equação (86) mostra que os valores correntes da variável endógena π_t dependem das expectativas do público sobre algumas variáveis endógenas, do presente ao futuro longínquo. Pela equação (84), a taxa de inflação é influenciada pela previsão corrente da inflação para o próximo período, porém a taxa de inflação do próximo período depende das expectativas do próximo período sobre a inflação dois períodos à frente, e assim sucessivamente. A taxa de inflação corrente é então determinada pelas previsões do público sobre as variáveis que determinam as taxas de inflação subseqüentes, que neste caso são as taxas futuras de expansão monetária e os distúrbios futuros incidentes sobre a demanda por moeda.

O próximo passo é apresentar uma descrição de como o público forma as suas expectativas sobre as taxas de expansão da oferta monetária, ou seja, apresentar uma expressão que, admite-se, governa a evolução observada da taxa de crescimento da moeda. A partir daí, pode-se assumir que o público utiliza essa expressão na formação de suas expectativas de μ , o que garante que suas expectativas sejam consistentes com o processo seguido pela taxa de expansão monetária.

Uma forma de modelar a taxa de crescimento da moeda é afirmar que ela segue um processo auto-regressivo puro, i.e.,

$$\mu_t = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \mu_{t-i} + u_t, \quad (87)$$

onde os ϕ_i 's são constantes e u_t é um termo aleatório serialmente não correlacionado, com média zero e variância finita. Assume-se que u_t é distribuído independentemente dos ε_t 's que aparecem na demanda por moeda. Com essa especificação, a taxa de crescimento monetário é exógena no que respeita à taxa de inflação; ver Sargent e Wallace (1973a). Assim, podemos escrever a expressão dos valores esperados do crescimento da moeda no tempo t como

$$E_t \mu_{t+j} = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ij} \mu_{t-i}, \quad (88)$$

onde v_{ij} 's são funções dos ϕ_t 's. Substituindo (88) em (86), produz-se a forma compacta da dinâmica da taxa de inflação

$$\pi_t = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i \mu_{t-i} + \tilde{\varepsilon}_t, \quad (89)$$

onde

$$Z_0 = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-a}{1-a} \right)^j \vartheta_{0j}$$

$$Z_i = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{-a}{1-a} \right)^j (\vartheta_{ij} - \vartheta_{i+1,j}) \right], \quad i \geq 1,$$

³² Note que, avançando (86) para obter π_{t+1} e tomando expectativas no tempo t , produz-se uma expressão idêntica a (85), o que confirma que a expectativa do público é consistente com a previsão do modelo para a taxa de inflação.

$$\tilde{\varepsilon}_t = -\sum_{j=1}^{\infty} (-a/(1-a))^j (E_t \varepsilon_{t+j} - E_t \varepsilon_{t+j-1}) + \sum_{j=1}^{\infty} (-a/(1-a))^j (E_{t-1} \varepsilon_{t+j-1} - E_{t-1} \varepsilon_{t+j-2}) - \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}.$$

A equação (89) é uma forma reduzida que expressa a taxa de inflação como um polinômio de lags das taxas de expansão monetária corrente e passadas. Dado que os u 's são por hipótese não correlacionados com os ε 's, segue que os $\tilde{\varepsilon}$'s são também não correlacionados com os μ 's em (89), confirmando assim que é legítimo tratar as taxas de expansão monetária como exógenas em (89). Logo essa equação pode ser estimada por meio de LS, dado que a falta de correlação ente os $\tilde{\varepsilon}$'s e os μ 's garante a consistência dos estimadores de OLS.

Contudo, para estimar o parâmetro estrutural a com as estimativas dos coeficientes da forma reduzida é necessário precisar qual a forma da auto-regressão (87) e quanta informação está disponível a priori sobre os coeficientes dessa equação. Apenas se a especificação (87) for severamente restrita é possível estimar o parâmetro estrutural através da forma reduzida. A sugestão da literatura é usar o seguinte estimador de dois estágios para a : primeiro por OLS

estima-se $\hat{\pi}_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{h}_i \mu_{t-i}$, então substitui-se π_t^e por $\hat{\pi}_{t+1}$ e π_{t-1}^e por $\hat{\pi}_t$ na equação (81') e

estima-se a por OLS. Dado que os μ_t 's são instrumentos válidos para π_t^e , sendo não correlacionados com os $\tilde{\varepsilon}$'s, o estimador \hat{a} de a será estatisticamente consistente; ver Sargent e Wallace (1973a).

Assumindo que a taxa de crescimento monetário segue um processo auto-regressivo, podemos obter uma versão completa do modelo de Cagan, no qual supõe-se as expectativas serem racionais. Contudo, existem razões para acreditar que a equação (87) não é uma descrição apropriada para a taxa de crescimento da moeda no contexto do modelo. Isto porque o modelo é desenhado para explicar o comportamento da inflação durante períodos de alta inflação, seja uma mega ou uma hiperinflação, em ambientes nos quais o governo utiliza a criação monetária para financiar seus déficits operacionais, seja em parte ou no todo. De maneira a manter seu déficit operacional no nível desejado – em termos reais –, o governo provavelmente responde ao declínio do poder de compra da moeda aumentando a taxa pela qual crescem os estoques de moeda. Tal comportamento torna a taxa de crescimento da moeda dependente, em parte, do nível de preços, criando-se assim um feedback vindo da taxa de inflação esperada pelo público, a qual ajuda a determinar o nível de preços, para a taxa de expansão monetária³³. Tal feedback não ocorre caso a equação (87) seja uma descrição adequada do processo de criação de moeda. Se, porém, não for esse o caso, usar (87) para modelar a formação de expectativas implica assumir que o público nunca é capaz de perceber o que de fato o governo está fazendo para financiar seus déficits através de criação monetária; ver Bruno e Fischer (1990).

A possibilidade de a taxa de inflação esperada influenciar a taxa de expansão monetária permite desenvolver um procedimento tal que o método adaptativo de formação de expectativas seja racional. Sob a hipótese adaptativa, a taxa de inflação é descrita pela equação (82), que pode ser reescrita como

$$\{1 + a(1 - \lambda) - [\lambda + a(1 - \lambda)]L\}\pi_t = (1 - \lambda L)\mu_t - (1 - \lambda L)(1 - 1)\varepsilon_t. \quad (90)$$

Considerando os argumentos apresentados sobre a endogeneidade da expansão monetária, suponhamos então que ela seja determinada pela expressão

$$\mu_t = [(1 - \lambda)/(1 - \lambda L)]\pi_t + \eta_t, \quad (91)$$

³³ Essa situação é bem representada pela equação (25), na seção 3, em que a senhoriagem está fixa e a taxa de expansão monetária endogeneizada pelo nível de senhoriagem e a taxa esperada de inflação.

onde η_t é um termo aleatório sem correlação serial. Substituindo (91) em (90), temos $[1 + a(1 - \lambda)](1 - L)\pi_t = (1 - \lambda L)[\eta_t - (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})]$, que pode ser rescrita como

$$\pi_t = [(1 - \lambda)/(1 - \lambda L)]\pi_{t-1} + [\lambda + a(1 - \lambda)]^{-1}[\eta_t - (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})]. \quad (92)$$

Agora suponhamos que ε_t siga um processo Markov $\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} + \zeta_t$, onde ζ_t é um termo aleatório $(0, \sigma^2)$. Sob esta hipótese, a equação (92) mostra que a previsão do modelo de π_t em $t - 1$ é dada por

$$E_{t-1}\pi_t = [(1 - \lambda)/(1 - \lambda L)]\pi_{t-1}, \quad (93)$$

que é o esquema de expectativas adaptativas de Cagan. Então, sob a hipótese de que as expectativas sejam racionais, a equação (91) é equivalente a

$$\mu_t = E_t\pi_{t+1} + \eta_t, \quad (94)$$

a qual captura o feedback da inflação esperada para a expansão monetária, o que irá ocorrer se o governo está financiando uma parcela fixa do seu déficit permanente com expansão monetária.

Assim, com as restrições impostas sobre os ε 's e sobre o processo estocástico dos μ 's, consegue-se obter que o esquema de expectativas adaptativas de Cagan gere expectativas idênticas às previsões do modelo. O sistema que emerge é tal que, em qualquer instante do tempo, o público espera uma taxa constante de inflação e uma taxa constante de criação de moeda que irá prevalecer ao longo de todo o futuro. Pela equação (94), temos que $E_t\mu_{t+1} = E_t\pi_{t+2}$, ou genericamente que $E_t\mu_{t+j} = E_t\pi_{t+j+1}$. Porém o esquema adaptativo de Cagan tem a propriedade que $E_t\pi_{t+j} = E_t\pi_{t+1}$, $\forall j > 1$ (ver Muth, 1960), logo $E_t\mu_{t+j} = E_t\pi_{t+j} = E_t\pi_{t+1}$, $\forall j > 1$. Segue que, pelas hipóteses assumidas, a equação (85) torna-se

$$E_t\pi_{t+1} = [(1/(1 - a))\sum_{j=1}^{\infty} [-a/(1 - a)]^{j-1}] E_t\mu_{t+j} = E_t\mu_{t+1} [(1/(1 - a))\sum_{j=1}^{\infty} [-a/(1 - a)]^{j-1}] = E_t\mu_{t+1}. \quad (95)$$

O sistema obtido é tal que as expectativas de inflação influenciam a taxa de criação monetária e que, no equilíbrio a cada instante, o público espera uma única taxa de inflação e criação de moeda, que prevalecerá indefinidamente no futuro. Além disso, espera-se que a taxa de criação monetária seja igual à taxa de inflação. Nesse sistema, as expectativas de criação monetária podem ser formadas também como um polinômio de lags dos valores passados da expansão monetária. Substituindo (92) em (91) e rearranjando, obtemos o processo ARMA

$$\mu_t = [(1 - \tau)/(1 - \tau L)]\mu_{t-1} + [\lambda + a(1 - \lambda)]^{-1}(1 - \lambda)[\eta_t - (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})] + \eta_t,$$

onde τ é um parâmetro que depende da razão entre as variâncias de η_t e $(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$. Dadas as hipóteses feitas, a previsão de LS de μ_t é dada por $E_{t-1}\mu_t = [(1 - \tau)/(1 - \tau L)]\mu_{t-1}$. A taxa esperada de inflação pode também ser escrita como a mesma função dos valores passados dos μ 's.

Agora suponha que μ_t não seja observado diretamente e que existam em seu lugar dados $\bar{\mu}_t$ que possuam erros de medida, i.e.,

$$\bar{\mu}_t = \mu_t + s_t, \quad (96)$$

onde s_t é um termo aleatório sem correlação serial que é distribuído independentemente de η_t e ε_t . Nesse caso, dado que μ não é observado enquanto π o é, a melhor forma de prever é fazer uso das equações (91), (93) e (94) e prever a expansão monetária e a taxa de inflação com valores defasados da inflação passada.

Existem então duas formas de construir um modelo de hiperinflação. O primeiro modelo consiste das equações (87), (88) e (89). Neste sistema, μ_t e $\bar{\mu}_t$ são exógenos com respeito a π_t , sendo não correlacionados com os termos aleatórios ε 's da função de demanda por moeda que entram na determinação de π_t . Nesse sistema, a expansão monetária influencia os valores

presente e futuros da taxa de inflação; mas, dadas as taxas passadas de expansão monetária, os valores passados da inflação não exercem nenhuma influência na expansão monetária. O sistema é tal que a expansão monetária causa inflação no sentido de Granger, enquanto a inflação não causa a criação de moeda. Nesse sistema o esquema de expectativas adaptativas de Cagan não é racional.

Já no segundo modelo, o esquema de expectativas adaptativas de Cagan é racional. Ele consiste das equações (86), (91), (94) e (96). Neste sistema, o melhor caminho para prever as taxas futuras de expansão monetária que aparecem na equação (86) é extrapolar as taxas defasadas de inflação, implicando que a taxa de inflação é mais bem predita pela extrapolação dos seus valores passados. Este é um sistema em que tanto a expansão monetária quanto a inflação são preditas de forma ótima pela extrapolação dos valores presentes e passados da taxa de inflação e no qual as taxas defasadas de expansão monetária não adicionam nada às predições formadas da maneira descrita. Neste sistema, os valores defasados da inflação influenciam a expansão monetária, mas a expansão monetária defasada não influencia a inflação, apenas os valores defasados da inflação são relevantes. Um elemento crítico neste sistema é a hipótese de realimentação que ocorre da inflação esperada em direção à expansão monetária, o qual aparece porque o governo está tentando financiar uma taxa aproximadamente constante do seu déficit operacional com emissão monetária.

Teorias fiscais de senhoriagem, inflação e hiperinflação são baseadas sobre os fundamentos – existe de fato um déficit que precisa ser financiado e isto é o que leva à emissão monetária. Uma explicação alternativa para as hiperinflações é que elas são simplesmente bolhas, similares às que ocorrem em mercados financeiros. Esses fenômenos são baseados na possibilidade de múltiplos equilíbrios nas quais as expectativas podem ser auto-realizáveis – conforme mencionado na seção 6.

A solução para o problema da multiplicidade de equilíbrios passa pela imposição de restrições capazes de restringir a dimensionalidade desses equilíbrios. Suponha que a taxa nominal da oferta monetária é dada pelo processo $m_t = \theta_0 + (1 - \gamma)\theta_1 t + \gamma m_{t-1}$. Uma vez que m é o log da oferta de moeda, a taxa de crescimento da oferta de moeda é dada por $m_t - m_{t-1} = (1 - \gamma)\theta_1 + \gamma(m_{t-1} - m_{t-2})$ e a tendência média da taxa de crescimento é θ_1 ; ver Walsh (1998). Dados esse processo e a hipótese de que os agentes façam uso da condição de equilíbrio dos preços³⁴ para formar as suas expectativas, uma solução para o nível de preços é dada por

$$p_t = \frac{a[\theta_0 + (1 - \gamma)\theta_1(1 + a)]}{1 + a(1 - \gamma)} + \frac{a(1 - \gamma)\theta_1}{1 + a(1 - \gamma)} t + \frac{1}{1 + a(1 - \gamma)} m_t = A_0 + A_1 t + A_2 m_t. \quad (98)$$

Pode-se então verificar essa solução notando que ela implica que

$E_t p_{t+1} = A_0 + A_1(t + 1) + A_2 E_t m_{t+1} = A_0 + A_1(t + 1) + A_1[\theta_0 + (1 - \gamma)\theta_1(t + 1) + \gamma m_t]$; substituindo em (97) produz a solução proposta. Sob essa solução, a taxa de inflação $\pi_t = p_t - p_{t-1}$ converge para θ_1 , que é a taxa média de crescimento da oferta nominal de moeda³⁵.

Consideremos agora uma solução alternativa

$$p_t = A_0 + A_1 t + A_2 m_t + B_t, \quad (99)$$

onde B_t varia com o tempo. Interessa-nos determinar se existe um processo B_t consistente com (97). Substituindo a nova solução proposta na condição de equilíbrio para o nível de preços, produz-se

³⁴ Tomando a equação (19) e resolvendo para os preços sob a hipótese de expectativas racionais, temos a condição de equilíbrio dos preços $p_t = \frac{m_t}{1 + a} + \frac{a E_t p_{t+1}}{1 + a}$. (97)

³⁵ O que se deriva do fato de que $\pi_t = A_1 + A_2(m_t - m_{t-1})$ converge para $A_1 + A_2\theta_1 = \theta_1$.

$$A_0 + A_1 t + A_2 m_t + B_t = \frac{m_t}{1+a} + \frac{a[A_0 + A_1(t+1) + A_2 E_t m_{t+1} + E_t B_{t+1}]}{1+a},$$

que para prevalecer para todas as realizações da oferta nominal de moeda, requer que A_0 , A_1 e A_2 assumam os mesmos valores respectivos que em (98). Isso então implica que o processo B deve satisfazer

$$B_t = [(a/(1+a))E_t B_{t+1}], \quad (100)$$

o que vale se B segue o processo explosivo

$$B_{t+1} = kB_t, \quad (101)$$

para $k \equiv [(1+a)/a] > 1$. Ou seja, a equação (99) é uma solução de equilíbrio para qualquer processo que satisfaça (101). Desde que B cresça a uma taxa $k - 1 = 1/a$, e dado que a – que é a semi-elasticidade da demanda por moeda com respeito à taxa de inflação esperada – é em geral tida como pequena, seu inverso é grande. Logo a taxa de inflação ao longo de uma solução de bolha pode exceder bastante a taxa de crescimento monetário.

Os métodos desenvolvidos para testar a presença de bolhas são similares àqueles que têm sido empregados para testar o equilíbrio intertemporal de déficits públicos. Por exemplo, se o estoque nominal de moeda é não estacionário, então a ausência de bolhas implica que o nível de preços é igualmente não estacionário, mas cointegrado com a oferta de moeda. Esta é uma implicação testável da hipótese de ausência de bolhas. A equação (101) fornece o exemplo mais simples de um processo de bolha.

Considere agora a equação (86), supondo que as esperanças condicionais dos choques aleatórios sejam iguais a zero e $\omega_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$, assim a solução da taxa de inflação com ausência de bolhas é dada por

$$\pi_t = \mu_t + \sum_{j=1}^{\infty} [a/(1+a)]^j E_t \mu_{t+j} - \sum_{j=1}^{\infty} [a/(1+a)]^j E_{t-1} \mu_{t+j-1} - \omega_t. \quad (102)$$

Sem a imposição da condição de transversalidade, uma bolha racional pode existir, dado que infinitas soluções são possíveis para a equação (90), cuja forma geral é então dada por

$$\pi_t = F_t + B_t, \quad (103)$$

onde F_t representa a solução dos fundamentos e B_t a solução de bolha. Conforme mostrado acima, para ser consistente com expectativas, a bolha deve obedecer ao processo (100), rescrito para

$$E_t [B_{t+1}] - [(1+a)/a]B_t = 0. \quad (104)$$

As soluções para (104) satisfazem a equação de diferenças estocásticas

$$B_{t+1} - [(1+a)/a]B_t = \zeta_{t+1}, \quad (105)$$

onde a variável aleatória ζ_t satisfaz $E_t [\zeta_{t-k}] = 0, \forall k \geq 0$. Reescrevendo (85) com as hipóteses acima, incluindo o termo de bolha e resolvendo para a taxa de inflação, a solução obtida é

$$\pi_t = \mu_t + \sum_{j=1}^{\infty} [a/(1+a)]^j (E_t \mu_{t+j} - E_{t-1} \mu_{t+j-1}) + B_t - \omega_t. \quad (106)$$

A presença de bolhas tem várias implicações. A primeira é que a presença delas impede a estacionariedade de qualquer número de diferenciações da taxa de inflação. Tomando primeiras diferenças da bolha na equação (105), temos

$$\{1 - [(1+a)/a]L\}(1-L)B_t = (1-L)\zeta_t \quad (107)$$

e, se continuarmos tomando diferenças, a representação ARMA da equação (107) nunca será estacionária – dado que as raízes do processo estão fora do círculo unitário – nem inversível. A bolha introduz uma não estacionariedade que não pode ser removida por diferenciação; ver Diba e Grossmann (1988a) e (1988b). A presença de bolhas também elimina a possibilidade de

cointegração entre a taxa de inflação e a expansão monetária. Rearranjando a equação (106) e incluindo a taxa de crescimento do produto y , suposta constante, temos

$$\pi_t - \mu_t + y = \sum_{j=0}^{\infty} [(a/(1+a))]^{j+1} (E_t \mu_{t+j+1} - E_{t-1} \mu_{t+j}) + B_t - \omega_t. \quad (108)$$

Suponhamos que ambas as taxas de inflação e de crescimento monetário sejam estacionárias em primeiras diferenças. Nesta representação clássica, o lado esquerdo de (108) é uma relação de equilíbrio de longo prazo entre inflação e expansão monetária com vetor de cointegração $\alpha' = [1, -1]$ e um intercepto, enquanto o lado direito representa os resíduos z_t . Se não existem bolhas, os resíduos são estacionários e a inflação e o crescimento monetário são cointegrados de ordem $C(1,1)$. Na presença de bolhas³⁶, todavia, os resíduos da relação de cointegração não são estacionários. Conseqüentemente, se as duas variáveis cointegram, não existem bolhas, o que implica que a relação de cointegração existente entre elas elimina qualquer não estacionariedade de variáveis não observadas³⁷; ver Diba e Grossman (1988a)³⁸. De modo similar, se a expansão monetária e a taxa de inflação são ambas estacionárias depois de d diferenças, então não podem existir bolhas inflacionárias especulativas³⁹; ver Hamilton⁴⁰ e Whiteman (1985)⁴¹.

³⁶ Em um instigante artigo, Imrohoroğlu (1993) realiza um exercício sobre a presença de *sunspots* na hiperinflação alemã, usando um método de solução recursiva que emprega filtros de Kalman para resolver o termo de expectativas não observáveis. O método envolve escrever o modelo formado pelas equações (62) e (63) na forma de espaço de estado, incluindo as esperanças condicionais no vetor de variáveis não observadas. O filtro de Kalman é, então, usado para resolver o modelo numericamente, gerando a melhor estimativa do vetor de estado – incluindo as expectativas – e de sua matriz de covariância como função dos parâmetros do modelo. O filtro também fornece a seqüência de inovações e sua matriz de covariância como função dos parâmetros que formam a função de verossimilhança dos dados. Uma maximização numérica da função verossimilhança gera então as estimativas de ML dos parâmetros livres do modelo.

³⁷ Evans (1991) mostra em que condições os testes de cointegração podem falhar em detectar bolhas que seguem processos que colapsam periodicamente, com a advertência de que essas constatações se restringem à presença de bolhas racionais no preço de ações.

³⁸ Uma outra abordagem é o teste de cointegração entre taxa de câmbio, oferta de moeda e outras variáveis incluídas nos fundamentos; ver Meese (1986). Em princípio, se não existem bolhas na taxa de câmbio, seria possível achar alguma combinação linear estacionária entre a taxa de câmbio e seus supostos fundamentos. Esse teste menos estrutural tende a rejeitar a hipótese nula de ausência de bolhas especulativas. Entretanto, em períodos suficientemente longos, existe de fato uma relação estacionária entre a taxa de câmbio e os fundamentos tradicionais.

³⁹ Outra forma de eliminar bolhas racionais é requerendo que as soluções de equilíbrio de expectativas racionais do modelo sejam estáveis no sentido que, dado um pequeno desequilíbrio devido a um desvio da regra de expectativas racionais, o sistema deverá retornar para um equilíbrio de expectativas racionais sob uma revisão natural da regra; ver Evans (1985).

⁴⁰ Note que, em contraste com o trabalho de Casella (1989), que seguiu o procedimento de West (1987) para testar bolhas na hiperinflação alemã a partir de formas estruturais, o procedimento descrito segue uma abordagem não estrutural, em Hamilton e Whiteman (1985) e Diba e Grossmann (1988a). Nesse caso, os resultados não dependem da forma funcional da demanda por moeda.

⁴¹ Uma abordagem para testar a presença de bolhas é a de West (1987), que reconhece que a estimação direta da forma reduzida, equação (102), produz uma estimativa consistente do parâmetro da demanda por moeda a apenas na ausência de bolhas especulativas. Em caso contrário, existe um termo de bolha omitido que, se não incluído, torna viesadas as estimativas. De outro lado, vale a equação (19), que pode ser estimada diretamente para verificar a presença de bolhas especulativas. Contudo, estimativas de a feitas a partir de (19) são geralmente menos eficientes do que aquelas realizadas com (102), porque esta última impõe mais das restrições existentes no modelo; ver Obstfeld e Rogoff (1997). O teste de West envolve estimar a usando as duas abordagens e comparar estatisticamente os resultados. Se as duas estimativas de a não são significativamente diferentes, a hipótese nula de que não existem bolhas especulativas não é rejeitada. Devido à presença de variáveis endógenas, a estimação da equação (19) requer técnicas de variáveis instrumentais. A estimação de (102) pode ser feita através de máxima verossimilhança. A metodologia de estimação envolve postular um modelo estatístico para o comportamento da oferta monetária e então calcular π_t com base no modelo estatístico e sob a hipótese de expectativas racionais. A etapa seguinte é estimar conjuntamente os parâmetros do processo estatístico que governa as variáveis exógenas e

Supõe-se também que bolhas especulativas deflacionárias não podem existir. Em um contexto de horizonte infinito com agentes maximizadores de utilidade, bolhas deflacionárias não podem existir; ver Obstfeld e Rogoff (1983)⁴². O argumento é que os agentes teriam de esperar que o poder de compra de seus encaixes reais de moeda crescesse sem limites. A capacidade produtiva da economia elimina este fenômeno e, portanto, indivíduos racionais não poderiam esperar bolhas deflacionárias; isto é, bolhas não podem ser negativas em nenhum instante do tempo. Portanto, se $B_{t+1} \geq 0$, por (105) temos que

$$\zeta_{t+1} \geq -(1+a)/a]B_t, \quad \forall t \geq 0. \quad (109)$$

Se $B_t = 0$, dado que o valor esperado de ζ_{t+1} é zero, então ζ_{t+1} deve ser igual a zero com probabilidade um. Essa restrição de não negatividade sobre o componente estocástico da bolha implica que, se ela não existe no tempo t , então uma bolha racional não pode existir no tempo $t + 1$, devido a uma perturbação aleatória de grandes proporções, i.e., a uma sunspot. Se uma bolha racional existe, ela tinha de ter começado no momento em que se iniciou a emissão de moeda fiat. Ou seja, a moeda teria de estar subvalorizada desde o início da sua introdução; ver Diba e Grossman (1988b).

9. Conclusões

Neste artigo apresentamos uma revisão dos modelos clássicos de formação de expectativas inflacionárias e de modelos de inflação e hiperinflação. Um dos nossos focos foi explicitar os resultados entre as combinações do modelo de Cagan e as regras de formação de expectativas de inflação. Uma das conclusões que consideramos mais contundentes é a possibilidade de que no caso do modelo com parâmetros variáveis ou com expectativas racionais possa emergir um processo megainflacionário, que é uma situação em que, devido aos fundamentos, a taxa de inflação converge para uma inflação elevada de equilíbrio estacionário, sem que isso implique pânico ou um processo hiperinflacionário.

Consideramos o caso de uma economia com déficit público permanente, inflação e moeda indexada. Se as expectativas não são adaptativas, o crescimento da dívida pública realimenta o processo inflacionário indefinidamente, tendo como elemento transmissor a elevação persistente da taxa de juros. Desta forma, a moeda indexada acaba por agravar os problemas de uma economia inflacionária.

Analisamos uma economia em que ocorrem sistematicamente planos de estabilização de inflação que têm como pedra angular congelamentos de preços e violação de contratos. Esses tipos de choques, por hipótese, acabam transtornando o processo de formação de expectativas inflacionárias, as quais passam a depender e a se acelerar com a ocorrência desses choques. Nessa economia com baixo coeficiente de monetização provocado pela inflação persistente e onde a autoridade monetária executa uma política monetária acomodatória,

a equação de π_t . Os parâmetros dessas equações serão relacionados. Aplicações do teste para dados de hiperinflação geralmente falham em rejeitar a hipótese de ausência de bolhas – como é o caso de Casella (1989), que não rejeita a presença de bolhas quando a moeda é tomada como exógena, mas obtém indicações de que os resultados são sensíveis a essa hipótese. Quando se aplica o teste a períodos menos turbulentos, os resultados podem ser misturados. Se um componente do modelo empírico é especificado erradamente, as duas estimativas de a podem divergir mesmo que não existam bolhas, caso em que os resultados do teste conduzem a conclusões equivocadas.

⁴² Contudo, em um sistema de moeda fiat não lastreada, hiperinflações especulativas não podem em geral ser eliminadas, sendo portanto consistentes com uma trajetória de equilíbrio. Assim, trajetórias de equilíbrio podem existir quando os saldos reais eventualmente convergem para zero, quando o nível de preços vai para infinito. Além disso, uma vez que estoure, uma bolha inflacionária racional não pode recomeçar. Porém, quando o governo lastreia parcialmente a moeda garantindo um mínimo de cobertura real para o valor da moeda, hiperinflações especulativas são impossíveis, mesmo que os agentes não estejam completamente certos de que poderão recuperar seu dinheiro a qualquer momento dado do tempo; ver Diba e Grossman (1983).

esse tipo de planos de estabilização conduz a inflação para uma trajetória sempre crescente que, *coeteris paribus*, se aproxima de um processo hiperinflacionário.

O modelo de Cagan com expectativas racionais anteposto ao modelo com expectativas adaptativas levanta a questão de como enfrentar o problema inflacionário. Com expectativas adaptativas, uma austera política fiscal e monetária reduziria a princípio a taxa de inflação gradualmente; enquanto, com expectativas racionais, é suficiente que a política de austeridade seja crível para o processo inflacionário ser estancado imediatamente. Entretanto, sob expectativas racionais, a solução para a taxa de inflação não é única, havendo sempre a possibilidade de ocorrência de bolhas especulativas ou *sunspots*, nos momentos de clímax da taxa de inflação, que podem impedir a implantação de uma política de estabilização exitosa.

Numa economia com regime inflacionário persistente, a regra de formação de expectativas adaptativas é motivada pela falta de informação, pela incerteza e pela existência de um sistema eficiente de indexação. Assim a passagem para a regra de expectativas racionais envolve um período de transição durante o qual novas informações são combinadas com velhos hábitos e crenças na formação de novas previsões. Nessa economia, os agentes não são completamente *forward looking*, havendo elevada persistência de choques de salários e preços, a qual é tão mais acentuada quanto maior for o déficit público a ser financiado com emissão monetária. Ainda que os agentes sigam a regra de expectativas racionais, nessa economia com agentes que sejam *backward looking* uma política monetária acomodatória de choques de oferta é capaz de manter o nível de emprego e aumentar a inércia inflacionária.

Isso não significa que os agentes estejam passando por um processo de aprendizado, digamos, de mínimos quadrados ordinários. Nessa versão do modelo de Cagan sob expectativas racionais e previsão perfeita, a taxa de inflação alta é a taxa de equilíbrio estacionário e a estática comparativa é perversa, porém capaz de explicar a ocorrência de processos megainflacionários. De outro lado, com o processo de aprendizado, embora a dinâmica seja mais lenta que aquela associada a expectativas racionais, a economia converge para a taxa baixa de inflação, que é uma solução de expectativas racionais. Nesse equilíbrio, a estática comparativa é clássica: um aumento no déficit público permanente financiado com emissão monetária aumenta a taxa de inflação estacionária.

No plano empírico, utilizando o arcabouço teórico de Sargent e Wallace (1973a), analisamos a questão da inconsistência das estimativas de OLS da demanda por moeda, no contexto do modelo de Cagan com expectativas adaptativas. No entanto, se a taxa de crescimento monetário é exógena seguindo um processo auto-regressivo puro, podemos obter, ainda que as expectativas sejam adaptativas, estimativas consistentes dos parâmetros da demanda por moeda. Porém, se existe *feedback* da taxa de inflação esperada para a taxa de expansão monetária, o modelo adaptativo de Cagan é racional, o que implica que as expectativas geram previsões idênticas às previsões do modelo. O sistema é, então, tal que o público espera uma taxa constante de inflação e uma taxa constante de criação de moeda a prevalecer ao longo do tempo. No primeiro esquema, a expansão monetária causa a taxa de inflação no sentido de Granger, enquanto a inflação não causa moeda. No segundo, os valores defasados da inflação influenciam a expansão monetária, mas o inverso não é verdadeiro, porque o governo está tentando financiar uma taxa aproximadamente constante do seu déficit operacional com emissão monetária, tornando a oferta monetária endógena.

Podemos então testar a hipótese de que as expectativas seguem uma regra adaptativa contra a hipótese de que a regra é racional. A estratégia empírica segue os passos de testar a hipótese de cointegração entre a expansão monetária e a taxa de inflação e pesquisar sobre a relação de causalidade – no sentido de Granger – entre elas.

Ainda na mesma estrutura teórica, a evidência de uma moeda passiva já é um bom indicador de que as expectativas não são adaptativas e que a regra de formação é próxima da

racional. Entretanto, as séries podem não ser cointegradas, isto é, a taxa de crescimento da moeda real não é estacionária, o que suscita a hipótese de ocorrência de uma bolha especulativa ou *sunspots*. Porém se o agregado monetário mais adequado não for o M1, melhor será proceder aos testes com o M2 (M1 mais títulos públicos), o qual por intuição deve ter a sua taxa de crescimento cointegrada com a taxa de inflação e ser totalmente passivo.

O passo final é então verificar se (i) o imposto inflacionário coletado é compatível com aquele suportado pela economia; em caso contrário, sob expectativas adaptativas, estamos diante de um processo hiperinflacionário; e (ii), na hipótese afirmativa do item (i), se os dados observados permitem concluir que a liquidez real, medida pelo agregado monetário relevante, está relativamente constante, porque, em caso contrário, pode-se especular que a economia se move em direção à taxa de inflação alta de equilíbrio estacionário e que ela passa por um processo megainflacionário, mas não por uma hiperinflação.

10. Referências Bibliográficas

Blanchard, O. & Fisher, S. 1989. Lectures on Macroeconomics. Cap. 4, 5 e 10. Cambridge: The MIT Press.

Bodin de Moraes, P. (1988). “Keynes, Sargent e o Papel da Política Monetária em um Plano de Estabilização”, *Pesquisa e Planejamento Econômico*, 18(1), 145-160.

Bruno, M. (1989). “Econometrics and the Design of Economic Reform”, *Econometrica*, 57(2), 275-306.

Bruno, M. & Fischer, S. (1990). “Seigniorage, Operating Rules, and the High Inflation Trap”, *The Quarterly Journal of Economics*, May, 353-374.

Cagan, P. (1956). “The Monetary Dynamics of Hyperinflation.” In Friedman, M. (ed.) *Studies in the Quantity Theory of Money*. Chicago: The University of Chicago Press.

Casella, A. (1989). “Testing for Rational Bubbles with Exogenous or Endogenous Fundamentals”, *Journal of Monetary Economics*, 24 (July), 109-122.

Cerqueira, L.F. (1993). *Demanda por Moeda, Regressões Espúrias e Níveis de Instabilidade Hiperinflacionários*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Economia, PUC, RJ.

Cysne, R.P. & Simonsen, M.H. (1995). *Macroeconomia*. 2ª. ed. São Paulo: Editora Atlas.

Diba, B.T. & Grossman, H.I. (1988a). “Rational Inflationary Bubbles?”, *Journal of Monetary Economics*, 21:35-46.

Diba, B.T. & Grossman, H.I. (1988b). “Explosive Rational Bubbles in Stock Prices?”, *The American Economic Review*, 78(3), 520-530.

Engsted, T. 1994. “The Classic European Hyperinflations Revisited: Testing the Cagan Model Using a Cointegrated VAR Approach”, *Economica*, 61:331-343.

Evans, G.W. (1991). “Pitfalls in Testing for Explosive Bubbles in Asset Prices”, *The American Economic Review*, 81(4), 922-930.

Evans, G.W. & Honkapohja, S. (1999). “Learning Dynamics.” In Taylor, J.B. & Woodford, M., *Handbook of Macroeconomics*. Volume 1A (1999). Amsterdam: Elsevier/North-Holland.

Evans, G.W. & Honkapohja, S. (2001). *Learning and Expectations in Macroeconomics*. Cap. 1 a 3. Princeton: Princeton University Press.

- Fischer, S. (1982). "Seigniorage and the Case of National Money", *Journal of Political Economy*, v. 90(2).
- Hamilton, J.D. & Whiteman, C.H. (1985). "The Observable Implications of Self-Fulfilling Expectations", *Journal of Monetary Economics*, 16(3), 353-373.
- İmorohoroğlu, S. (1993). "Testing for Sunspots Equilibria in the German Hyperinflation", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17, 289-317.
- Lucas, R.E. (1972). "Econometric Testing of the Natural Rate Hypothesis." In Lucas, R.E. (ed.) *Studies in Business-Cycle Theory*. Cambridge: The MIT Press.
- Lucas, R.E. (1976). "Econometric Policy Evaluation: A Critique." In Lucas, R.E., ed., *Studies in Business-Cycle Theory*. Cambridge: The MIT Press.
- Marcet, A. & Sargent, T. (1989a). "Convergence of Least Squares Learning and the Dynamic of Hyperinflation." In Barnett, W., Geweke, J. & Shell, K. (eds.) *Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles, and Nonlinearity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Marcet, A. & Sargent, T. (1989b). "Convergence of Least Squares Learning in Environments with Hidden State Variables and Private Information", *Journal of Political Economy*, 97, 1306-1322.
- Marcet, A. & Sargent, T. (1989c). "Convergence of Least Squares Learning Mechanisms in Self-Referential Linear Stochastic Models", *Journal of Economic Theory*, 48, 337-368.
- McCallum, B.T. (1989). *Monetary Economics: Theory and Policy*. Cap. 7, 8 e 9. New York: Macmillan Publishing Co.
- McCallum, B.T. (1996). *International Monetary Economics*. Cap. 8. New York: Oxford University Press.
- Meese, R.A. (1986) "Testing for Bubbles in Exchange Markets: A case of Sparkling Rates?", *Journal of Political Economy*, 94(2), 345-373.
- Muth, J.F. (1960). "Optimal Properties of Exponentially Weighted Forecasts." In Lucas, R.E. and Sargent, T. (eds.) *Rational Expectations and Econometric Practice*. Minneapolis: The University of Minnesota Press (1981).
- Muth, J.F. (1961). "Rational Expectations and the Theory of Price Movements." In Lucas, R.E. & Sargent, T. (eds.), 1981, *op. cit.*
- Obstfeld, M. & Rogoff, K. (1983). "Speculative Hyperinflations in Maximizing Models: Can We Rule Them Out?" *Journal of Political Economy*, 91(4), 675-687.
- Obstfeld, M. & Rogoff, K. (1997). *Foundations of International Macroeconomics*. Cap. 8. Cambridge: The MIT Press.
- Pastore, A.C. (1995). "Déficit Público, a Sustentabilidade do Crescimento das Dívidas Interna e Externa, Senhoriagem e Inflação: Uma Análise do Regime Monetário Brasileiro", *The Brazilian Review of Econometrics*, 14(2), 177-234.
- Romer, D. (2001). *Advanced Macroeconomics*. 2nd edition. New York: McGraw-Hill.
- Sargent, T. & Wallace, N. (1973a). "Rational Expectations and the Dynamics of Hyperinflation." In Lucas, R.E. & Sargent, T. (eds.), 1981, *op. cit.*

Sargent, T. & Wallace, N. (1973b). “The Stability of Models of Money and Growth with Perfect Foresight”, *Econometrica*, 41(6), 1043-1048.

Sargent, T. & Wallace, N. (1975). “Rational Expectations, the Optimal Monetary Instrument, and the Optimal Money Supply Rule.” In Lucas, R. e Sargent, T. (eds.), 1981, *op. cit.*.

Sargent, T. & Wallace, N. (1976). “Rational Expectations and the Theory of Economic Policy.” In Lucas, R. e Sargent, T. (eds.), 1981, *op. cit.*

Sargent, T. & Wallace, N. (1986). “Some Unpleasant Monetarist Arithmetics” In Sargent, T. Rational Expectations and Inflation. New York: Harper & Row.

Sargent, T. & Wallace, N. (1987). “Inflation and the Government Budget Constraint.” In Razin, A. & Sadka, E. (eds.) *Economic Policy in Theory and Practice*. London: Macmillan Press (1987).

Sargent, T. (1982). “The End of Four Big Inflations.” In Sargent, T. Rational Expectations and Inflation. New York: Harper & Row.

Simonsen, M.H. (1990). “Aspectos Técnicos do Plano Collor”. In Faro, C. (org.) *Plano Collor I: Avaliações e Perspectivas*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.

Simonsen, M.H. (1991). “Choques Sucessivos e o Plano Collor II”. In Faro, C. (org.) *A Economia Pós-Plano Collor II*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.

Taylor, J.B. (1975). “Monetary Policy during a Transition to Rational Expectations”, *Journal of Political Economy*, 83(51), 1009-1021.

Taylor, J.B. (1979). “Staggered Wage Setting in a Macro Model”, *American Economic Review*, 69(2), 108-113.

Taylor, J.B. (1999). “Staggered Price and Wage Setting in Macroeconomics.” In Taylor, J.B. & Woodford, M. *Handbook of Macroeconomics*. Volume 1B. Amsterdam: Elsevier/North-Holland.

Turnovsky, S.J. (2000). *Methods of Macroeconomic Dynamics*, Cap3. 2nd ed. Cambridge: MIT Press.

Walsh, C.E. (1998). *Monetary Theory and Policy*. Cambridge: The MIT Press.

Watson, M.W. (1989). “Recursive Solution Methods for Dynamic Linear Rational Expectations Models”, *Journal of Econometrics*, 41(1), 65-89.

Welsh, J.H. (1991). “Rational Inflation and Real Internal Debt Bubbles in Argentina and Brazil?”, *unpublished paper*. L.A.M. of the Econometric Society.

West, K.D. (1987). “A Specification Test for Speculative Bubbles”, *Quarterly Journal of Economics*, 102 (August), 553-580.