

ISSN 1519-4612

Universidade Federal Fluminense

TEXTOS PARA DISCUSSÃO

UFF/ECONOMIA

Universidade Federal Fluminense

Faculdade de Economia

Rua Tiradentes, 17 – Ingá – Niterói (RJ)

Tel.: (0xx21) 2629-9699 Fax: (0xx21) 2629-9700

<http://www.proac.uff.br/econ/>

Editor: Luiz Fernando Cerqueira; lcer@uol.com.br; lfcerqueira@economia.uff.br.

Metodologia para a recuperação do PIB trimestral utilizando modelos univariados e multivariados em espaço de estado com valores omissos, benchmarking, variáveis explicativas e heterocedasticidade – Versão modificada

Luiz Fernando Cerqueira

TD 320

Fevereiro/2016

RESUMO

Neste artigo apresentamos uma metodologia para estimação da série, em índices e valores, do PIB trimestral no Brasil para o período 1960 a 1996. Embora a preocupação inicial fosse a de estimar apenas para o período 1965 a 1979, devido ao tamanho reduzido dessa amostra o período de pesquisa foi alongado. A metodologia parte da construção de uma série trimestral obtida com os coeficientes estimados em frequência anual de uma equação estática de Engle-Granger. O teste de cointegração foi realizado entre as séries dos índices de PIB, produção de veículos automotores, produção de cimento, consumo industrial de energia elétrica na região Rio-São Paulo e receita tributária do tesouro nacional real. A série estimada é encadeada com a série de PIB estimada pelo FIBGE a partir de 1980. O passo seguinte foi o de aprimorar os resultados inicialmente obtidos com modelos estruturais em espaço de estado. Foram estimados modelos univariados e multivariados. Na classe de modelos univariados, estimamos um modelo com valores omissos no período 1960 a 1979 e variáveis explicativas apropriadamente estacionarizadas, um modelo de benchmarking que corrige o erro de medida dos valores trimestrais – de modo que a soma de cada ano seja igual ao total anual calculado pelo FIBGE – e, estimamos um modelo com valores omissos e *benchmarking*. O modelo multivariado estimado SUTSE é uma generalização do modelo estrutural básico com variáveis explicativas. A heterocedasticidade presente foi tratada previamente antes da estimação de cada modelo. Os resultados reportados indicam que todos os modelos apresentam boas performances no que concerne a obediência das hipóteses do modelo Gaussiano linear. Por outro lado, o modelo com *missing values* recupera com êxito os valores omissos, assim como o modelo de *benchmarking* corrige o erro de medida dos valores trimestrais. A principal contribuição do artigo é a de apresentar uma metodologia consistente para a recuperação/estimação do PIB trimestral do período 1960 a 1979 e oferecer bases concretas para o desenvolvimento de uma metodologia de previsão/extrapolação do PIB trimestral.

PALAVRAS CHAVE: time series estimation; econometric modeling; univariate and multivariate structural time series models; Kalman filter; missing values; benchmarking.

JEL: C32, C51, C52.

1. Introdução

Objetivo principal deste artigo é o de descrever a metodologia desenvolvida para estimação do PIB trimestral no período 1960 a 1996, que utiliza métodos de espaço de estado em modelos estruturais de séries de tempo. E em seguida reportar os resultados obtidos.

A motivação inicial era o de estimar a série do Índice do PIB trimestral para o período 1960 a 1980¹ e obter uma série completa para o período completo de 1960 a 2004. Com o intuito de realizar estudos posteriores, como por exemplo, a estimação de uma demanda por moeda para este período ou subperíodo, onde a variável renda possui um papel central na forma funcional da demanda.

Entretanto na démarche empreendida no processo de estimação apareceram dificuldades operacionais, relatadas adiante, que nos conduziram a estimação para um período mais amplo e a uma metodologia “mais complexa” diferente da inicialmente pretendida. Assim acabamos chegando a escolha de modelos estruturais em estado de espaço.

Alguns estudos anteriores ao nosso, utilizando enfoques diversos procuraram sanar esta deficiência das estatísticas oficiais². Em geral, na ausência dessas estatísticas coletadas com o objetivo de computar o PIB, a montagem de estimativas trimestrais para o produto real agregado pode adotar três critérios: (i) um trabalho de interpolação dos dados anuais; (ii) um levantamento próprio a partir de amostras de bens e serviços; e (iii) uma combinação dos dois primeiros critérios (cf. Contador e Santos Filho, 1987).

Existem diversas técnicas para interpolação de séries, desde métodos simples baseados em suposições de comportamento linear ou quadrático. Como métodos mais elaborados, que lidam mais apropriadamente com valores omissos, a exemplo do ajuste aos dados de funções *spline* cúbicas e filtro de Hodrick-Prescott, que utilizam suavizações exatas de filtros de Kalman. Ou procedimentos de controle ótimo de funcionais de custo quadráticas, que utilizam soluções recursivas baseadas também em filtros de Kalman. Outros métodos utilizam séries disponíveis em bases mensais ou trimestrais que possuem forte relação com a variável objeto de interesse.

No Brasil a preferência dos pesquisadores recaiu sobre o uso da interpolação com séries relacionadas com o produto³. E neste estudo seguimos também este caminho.

A idéia inicial era fazer a estimativa do PIB trimestral a partir dos coeficientes de uma regressão entre o PIB e a produção de veículos automotores, de cimento, consumo industrial de energia elétrica nas regiões Rio e São Paulo, receita tributária real do tesouro nacional, produção de petróleo e de aço⁴. Utilizando as séries expressas em índices base 1980.

Se as séries são todas integradas de mesma ordem faz sentido realizar um teste de cointegração. E utilizar o vetor de cointegração associado a equação do PIB como relação de longo prazo de interesse entre estas variáveis. Os coeficientes estimados

¹ A partir de 1992, a série do Índice de PIB trimestral não dessazonalizado passou a ser divulgada periodicamente pelo FIBGE, tendo sido computada retroativamente desde 1980. Essa série passou por diversas revisões. A série utilizada neste artigo esteve disponível no *site* do IPEADATA e se referia àquela calculada pelo FIBGE com a “metodologia antiga”. Atualmente, ela aparece no *site* encadeada com a série calculada pela metodologia nova. Essa série não está disponível no *site* do FIBGE.

² Para uma abordagem aprofundada dos problemas das Contas Nacionais, ver Contador e Santos Filho (1987).

³ Para uma análise detalhada, ver Contador e Santos Filho (1987).

⁴ Todos os dados utilizados neste artigo são descritos detalhadamente no apêndice A.

seriam então aplicados sobre as séries trimestrais para calcular a série de índice do PIB trimestral.

O tamanho da amostra é um empecilho para esta estratégia, especialmente para implementação do procedimento de Johansen. Por sua vez, o teste de cointegração de Engle-Granger por ser menos exigente em termos de graus de liberdade é factível. Embora os seus resultados devam ser tomados com cautela, porque é um teste também idealizado para grandes amostras. Mesmo assim decidimos guardar os resultados obtidos com a equação estática de Engle-Granger como uma informação *a priori* a ser utilizada posteriormente.

As limitações existentes na metodologia raiz unitária-testes de cointegração nos lançaram numa busca por uma nova rota metodológica.

A motivação em utilizar o approach de espaço de estado é que ele permite tratar uma gama variada de problemas na análise de séries temporais. Neste approach assume-se que a evolução da série no tempo é determinada por uma série não observada de vetores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, com os quais estão associados uma série de observações y_1, \dots, y_n . A relação entre os α_t 's e os y_t 's é especificada por um modelo de espaço de estado. O propósito da análise de espaço de estado é inferir as propriedades relevantes dos α_t 's a partir de um conhecimento das observações y_1, \dots, y_n .

Uma vantagem no approach de espaço de estado é que ele é baseado sobre modelos estruturais de séries de tempo. Nestes modelos as observações são constituídas por tendência, sazonais, ciclos, componentes de regressão⁵, mais um termo irregular. Os componentes são geralmente representados por formas de modelos de *random walk* e são modelados previamente antes de serem colocados juntos com as observações no modelo de espaço de estado.

Uma outra vantagem dos modelos de espaço de estado é que eles são flexíveis. Devido a natureza recursiva dos modelos e das técnicas computacionais usadas para analisa-los é imediato permitir mudanças conhecidas na estrutura do sistema ao longo do tempo.

Modelos de espaço de estado são bastante gerais, cobrindo uma ampla variedade de modelos. Observações multivariadas podem ser tratadas como extensões da teoria univariada. Pode-se permitir a presença de valores omissos. Variáveis explicativas podem ser incorporadas ao modelo. Além disso, se necessário pode-se permitir que os coeficientes da regressão variem estocasticamente ao longo do tempo. Ajustes e variações de calendário também podem ser incluídos. Da mesma forma, que observações mensais e trimestrais podem ser ajustadas para terem consistência com observações anuais totais.

Devido a natureza Markoviana dos modelos de espaço de estado os cálculos necessários a sua implementação podem ser colocados na forma recursiva, o que possibilita trabalhar com modelos cada vez maiores sem um aumento desproporcional na carga computacional. Ademais, nenhuma teoria adicional é necessária para realizar previsões além da amostra, tudo o que se necessita é projetar o filtro de Kalman para o futuro. Assim, as previsões junto com os erros padrão podem ser estimados usando as mesmas formulas empregadas no início dos cálculos.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na seção 2 é feita uma revisão da literatura brasileira sobre estimações do PIB trimestral. Na seção 3 a metodologia é descrita em seus vários aspectos. Nela aparecem os primeiros passos dados na formação de uma massa crítica, uma extensa resenha sobre modelos estruturais em espaço de estado, e a descrição dos procedimentos metodológicos, assim como das dificuldades

⁵ Como por exemplo, variáveis explicativas, variáveis de intervenção e variações de calendário.

surgidas. Na seção 4 são apresentados os resultados dos modelos concorrentes estimados, além de comentários e recomendações sobre a escolha entre eles. Na seção 5 oferece-se uma conclusão. No apêndice A descreve-se o levantamento dos dados e a metodologia de interpolação de algumas das séries intervenientes. Neste apêndice se apresentam os dados originais e os respectivos testes de raiz unitária, as séries ajustadas para tratamento da heterocedasticidade presente nas estimações e as séries construídas para estimação do modelo de *benchmarking*. No apêndice B é feito um resumo sobre as características do modelo estrutural de nível local. No apêndice C aparecem as matrizes desenhadas para se estimar o modelo de *benchmarking*.

2. Revisão dos Estudos Disponíveis

Alguns estudos anteriores, utilizando enfoques diversos, procuraram sanar esta deficiência das estatísticas oficiais⁶. Em geral, na ausência dessas estatísticas coletadas com o objetivo de computar o PIB, a montagem de estimativas trimestrais para o produto real agregado pode adotar três critérios: (i) um trabalho de interpolação dos dados anuais; (ii) um levantamento próprio a partir de amostras de bens e serviços; e (iii) uma combinação dos dois primeiros critérios (cf. Contador e Santos Filho, 1987).

No Brasil a preferência dos pesquisadores recaiu sobre o uso da interpolação com séries relacionadas com o produto⁷.

Entre os estudos que se destacam daqueles que utilizam variáveis relacionadas com o PIB como forma de interpolação, aparece o de Cardoso (1981). Nele são feitas estimativas trimestrais para o período 1966 a 1979 para o PIB. As estimativas foram feitas a partir dos coeficientes de uma regressão do PIB anual contra a produção anual de cimento e de veículos automotores, o consumo industrial de energia elétrica no eixo Rio e São Paulo, e na arrecadação tributária real do Tesouro Nacional. As séries foram previamente convertidas em índice base 1977.

O estudo de Cardoso foi utilizado por Rossi (1981), Pastore (1991), Pinotti (1991) e Cerqueira (1993).

No entender de Contador e Santos Filho, o trabalho de Cardoso, assim como todos os demais, possui deficiências semelhantes nas suas estimativas: excessiva participação da produção industrial e a imposição de que a sazonalidade do produto real estimado seja a mesma da combinação das variáveis.

Esses autores⁸, na construção de sua série de PIB trimestral para o período 1973 a 1985, combinam amostragem com interpolação. Utilizam séries desagregadas para o produto do setor agropecuário (cultura e animal), indústria, comércio e transportes. Contudo, a metodologia empregada é diferente daquela utilizada pelo FIBGE. As séries desagregadas usadas se diferem assim, como os pesos, associados a cada uma de modo a compor a série agregada.

Nakane (1994) procura corrigir essas deficiências utilizando as mesmas ponderações que o FIBGE, de modo a tornar as séries comparáveis, e acrescenta a série desagregada original dos autores acima, a série de produto do governo calculada pelo FIBGE. Então, com a nova ponderação, calcula o produto agregado para o período completo. O passo seguinte na estratégia de Nakane é estimar uma regressão para o

⁶ Para uma abordagem aprofundada dos problemas das Contas Nacionais, ver Contador e Santos Filho (1987).

⁷ Para uma análise detalhada, ver Contador e Santos Filho (1987).

⁸ Um trabalho contemporâneo ao desses autores e de igual importância são as estimativas apresentadas na Macrométrica, elaboradas por F. Lopes e E. Modiano (1986). Ambos apresentam resultados e metodologia similares (ver detalhes em Contador).

período 1980 a 1985 da série do FIBGE contra dummies sazonais e a série modificada de Contador. Os coeficientes estimados são então utilizados para gerar a série de produto para o período 1974 até 1979.

Como sugerido pelo próprio Nakane, a série estimada apresenta distorções devido às diferenças do padrão de sazonalidade entre ela e a série do FIBGE. As estimações dos coeficientes das dummies sazonais, por mínimos quadrados recursivos, apesar de relativamente constantes durante o período de estimação, possuem uma nítida quebra em 1980, indicada pelas bandas do intervalo de confiança. 1980 é justamente o ano em que a série estimada é encadeada com a série do FIBGE.

Ao lado dos problemas apontados no método de estimação do PIB de Contador e Nakane, o procedimento tem ainda como calcanhar de Aquiles a descontinuidade dos dados utilizados para o setor agropecuário, de comércio e o produto do governo, assim como a dificuldade de obtê-los. Há também o “excesso” de metodologias usadas para obtenção das proxies das variáveis utilizadas, o que torna o procedimento árduo de se replicar e estender para períodos maiores e anteriores a 1974. Por essas razões esse procedimento não será empregado⁹.

Nosso objetivo é estimar uma série de PIB que vá pelo menos até o ano de 1996, bem como utilizar uma metodologia replicável, que tenha sentido econômico, seja intuitiva e simples de ser utilizada, e ainda possua baixo erro de medida.

Embora a primeira vista as estimativas que utilizam variáveis relacionadas ao PIB falham, porque estas não são representativas de todos os setores produtivos da economia, é inegável que uma combinação linear delas constitui uma boa proxy do PIB. O setor automobilístico é, desde os anos sessenta, o carro-chefe da economia. O setor de cimento, por sua vez, representa em massa o setor de construção civil, responsável pela geração de grande parte do emprego na economia. Da mesma forma, o setor de distribuição de energia elétrica foi o principal segmento do setor de serviços e continua sendo, junto com o setor bancário, um dos mais relevantes dos serviços. Por fim, é evidente que a receita tributária federal representa adequadamente as atividades do setor governamental, especialmente quando se tem em conta que parte dela é repassada a estados e municípios e ela é inteiramente gasta, pelo menos em grande parte do período de interesse.

Se a essas séries se juntarem à produção de petróleo e gás e a produção de aço, sua capacidade explicativa cresce consideravelmente, principalmente quando se tem em conta que o petróleo e seus derivados são utilizados em toda a cadeia produtiva brasileira e o aço é matéria-prima essencial¹⁰.

Devido aos aspectos positivos apontados, nossa metodologia toma como ponto de partida a estimação do PIB trimestral através de variáveis relacionadas a ele.

3. Metodologia

3.1 Aspectos Preliminares

⁹ Há também a série de índice do PIB a preços de mercado do IPEA computado de 1980 a 2001. A metodologia de cálculo até 1990 foi desenvolvida por Ardeo e Bonelli e publicada no Boletim Conjuntural do IPEA, número 3, abril de 1988.

¹⁰ Os dados sobre o setor de transportes não foram incluídos por não termos obtido uma série tão longa quanto as demais.

Antes de abordarmos a metodologia de espaço de estado, que é a dimensão metodológica mais importante deste artigo, vamos descrever os passos prévios essenciais ao êxito da pesquisa.

A idéia inicial era fazer a estimativa do PIB trimestral apenas para o período anterior a 1980. As variáveis incluídas são as referidas acima, a saber: PIB, produção de veículos automotores e cimento, consumo industrial de energia elétrica nas regiões Rio e São Paulo, receita tributária real, produção de petróleo e de aço. As séries estão expressas em índices base 1980.

A estimação utilizaria dados com frequência anual¹¹, para o período 1965 a 1980. A metodologia de estimação partiria do teste de cointegração entre as variáveis¹², utilizando o procedimento de Johansen. Os coeficientes do termo de correção de erros estimado seriam então aplicados sobre as séries em frequência trimestral, gerando a série do PIB.

No entanto, o pequeno tamanho da amostra (16 observações) se revelou desde logo um entrave. O pequeno número de graus de liberdade impediu a colocação de um número maior de lags para a correção da correlação serial nos resíduos, o que invalidava o teste de cointegração, o qual, ademais, por sua construção teórica, requer “grandes amostras”. Além disso, a possível presença de séries I(2), no período 1965 a 1980, poderia estar causando o excesso de correlação serial.

A solução encontrada para dar continuidade aos experimentos foi reduzir o número de variáveis e aumentar o tamanho da amostra. Esta última foi estendida para frente e para trás, de modo que o uso de lags não implicasse na redução do período base 1965 a 1980. Assim, alongou-se a amostra até o limite da disponibilidade de dados. A amostra passou então a cobrir o período 1960 a 1996¹³.

O número de variáveis foi reduzido para cinco¹⁴. A produção de aço foi retirada por ser intensiva em eletricidade, o que estava acarretando inversão de sinais nos coeficientes do ECM. Além disso, sua presença aumentava a correlação serial dos resíduos. A produção de petróleo, por sua vez, foi retirada em função do seu crescimento muito acelerado após 1980, o que levou a série a se afastar das demais.

Os estudos realizados com o procedimento de Johansen para o período 1960 a 1996 não apresentaram resultados aceitáveis. Embora os testes de raiz unitária tenham indicado que as cinco séries utilizadas são I(1), os resíduos do vetor de correção de erros (VECM) apresentaram elevada correlação serial. A qual não foi possível corrigir com um polinômio de lags de ordem cinco, número máximo imposto pelo tamanho da

¹¹ Isso porque, os dados para o PIB possuem frequência somente anual.

¹² A análise das funções de autocorrelação e do *spectral shape* das séries é conclusiva sobre a não estacionariedade delas no período 1965 a 1980. No entanto, a ordem de integração de cada uma não é clara. Os testes de raiz unitária utilizados não são conclusivos sobre se as séries nesse período são I(1) ou I(2), o que pode ser consequência do pequeno número de observações, ou também uma implicação da natureza econômica do período, durante o qual a economia brasileira atravessou um frenético surto de crescimento. Foram utilizados os testes DFGLS (*Dickey-Fuller with GLS detrending*, ERS (*Elliot, Rothenberg and Stock point optimal*) e NP (*Ng and Peron*). O número de lags e o tamanho da janela, foram escolhidos a partir da inspeção das funções de autocorrelação e da sensibilidade dos resultados em função da mudança destes parâmetros. O método de estimação nos dois últimos testes emprega a janela espectral quadrática (ver Maddala e Kim, 1998).

¹³ A série de energia elétrica, assim como a de receita tributária, só está disponível com frequência anual a partir de 1960. O truncamento em 1996 deveu-se ao fato de que a série do Índice do PIB trimestral metodologia antiga do FIBGE foi interrompida no terceiro trimestre de 1997. Para não termos que trabalhar com fração de ano, a amostra foi truncada no final de 1996.

¹⁴ A análise de componentes principais indica que apenas um componente representa 97.4% da variância global dos cinco componentes, o que indica que uma combinação linear dessas variáveis representa adequadamente uma relação de longo prazo entre elas.

amostra (T=35). Ademais, o VECM não mostrou boas características de estabilidade, apresentando mesmo após a restrição sobre o espaço dos vetores de cointegração, raízes muito próximas a um. Assim, essa estratégia teve de ser abandonada¹⁵.

Um procedimento alternativo, que como o de Johansen é válido assintoticamente, é o teste de dois estágios de Engle-Granger. Nessa hipótese, a equação estática é usada para fornecer os coeficientes de longo prazo, e o teste de raiz unitária aplicado sobre os resíduos da equação indica a existência de uma relação estável de longo prazo entre as variáveis.

Os testes realizados estão reportados na tabela 1 a seguir. O índice do PIB é a variável dependente. Do lado esquerdo da equação, aparecem um termo constante, uma tendência, e os índices de consumo de energia elétrica, de produção de veículos, receita tributária real e produção de cimento. Na parte inferior da tabela 1, reporta-se o resultado do teste de raiz unitária junto com os *p-values* dos testes *portmanteau* para a presença de correlação serial e o valor do critério de informação bayesiano.

Ao nível de 10%, rejeita-se a hipótese nula de não cointegração entre as variáveis. O teste apresenta resíduos sem correlação serial. Como esperado o R^2 está bem próximo de um caracterizando um ajuste perfeito, eliminando a necessidade de correção para o viés de equações simultâneas ou correlação serial (ver Engle-Granger, 1991). Ademais, no presente caso, a multicolinearidade existente entre as variáveis colaborou no sentido de obter este ajuste.

TABELA 1: ENGLE-GRANGER COINTEGRATION TEST
DEPENDENT VARIABLE: PIB

Variable	Coef.	P-value
C	0.112423	0.0000
TT	0.007836	0.0000
IEES	0.283306	0.0000
IAUTO	0.108377	0.0000
IRTNRS	0.098286	0.0145
ICIM	0.231170	0.0000

$R^2=0.9984$	DW=1.5793	SER=0.0164	$t \hat{\alpha} = -4.6341 \dagger$	lags=0
Q(1)=0.931	Q(4)=0.228	Q(8)=0.479	Q(12)=0.126	SIC=-5.4545

Nota: O símbolo (†) representa rejeição da hipótese nula de uma raiz unitária ao nível de significância de 10%.

O número de observações não é suficiente para se caracterizar um resultado assintótico, o que talvez nos impeça de falar que o vetor de coeficientes estimado seja superconsistente. Porém, a série obtida desta equação fornece uma proxy inicial bastante razoável para o índice do PIB trimestral. No apêndice A é apresentada a metodologia para transformação dos índices em valores (equação A1).

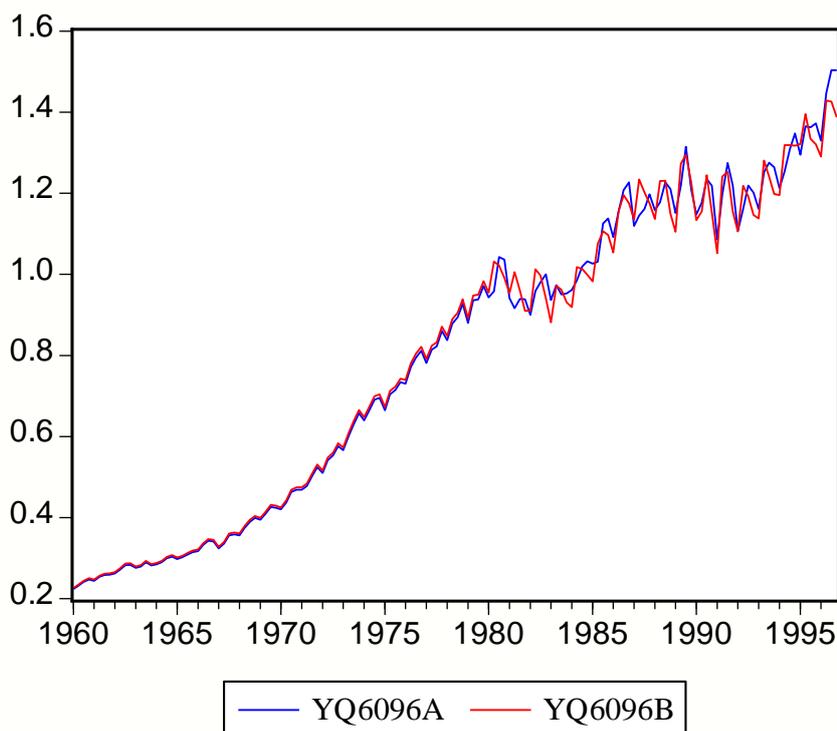
Na figura 1 aparece a série estimada para o período todo (YQ6096A), juntamente com a série estimada encadeada (para trás) a partir de 1980.1 com a série do FIBGE (YQ6096B). Embora não reportados, os testes de estabilidade da série encadeada não permitem concluir que a ocorrência de mudanças estruturais tenha sido apenas em 1980. Ao contrário, a série sofreu diversas mudanças de comportamento de 1971 em diante, especialmente no que concerne ao seu padrão de variação estacional¹⁶.

¹⁵ Cabe mencionar que, nos experimentos realizados, algumas variáveis apareceram com sinais negativos, o que provavelmente se deveu à colinearidade existente entre certas séries, como energia elétrica com aço e cimento. Entretanto, as séries de PIB estimadas com os coeficientes do ECM se apresentaram semelhantes àquelas obtidas com a estática de Engle-Granger.

¹⁶ Os testes estão disponíveis aos interessados que os solicitarem.

É forçoso reconhecer que a cointegração obtida entre as variáveis não nos parece robusta. O termo de tendência foi essencial para determinar o valor estimado para a estatística de teste. Um valor elevado nos colocaria numa posição mais confortável. Ainda que os experimentos com o procedimento de Johansen tenham apontado a existência de vetores de cointegração, suas validades são questionáveis pela presença de correlação serial nos resíduos e ausência de normalidade. Porém a exigüidade da amostra impediu o uso para correção desses problemas.

FIGURA 1: Índice do PIB Trimestral



Parece-nos, portanto, que devemos guardar o resultado obtido com o procedimento de Engle-Granger como ponto de partida, mas mudar de metodologia. A natureza restritiva da já convencional metodologia raiz unitária/cointegração não se coaduna com o uso de modelos que admitem uma heterogeneidade temporal mais geral (ver Caporale e Pittis, 2002). No período em estudo, as mudanças foram endêmicas. Neste caso, os processos econômicos são modelados mais adequadamente na forma de espaços de estado. Como se verá na próxima seção, a representação do estado de espaço inclui um processo Markoviano que concede uma flexibilidade muito grande ao procedimento em lidar com diversas situações, dentre as quais destacamos problemas em que aparecem *missing observations* e processos de *benchmarking* objeto da próxima seção.

3.2 Modelos de Espaço de Estado: Uma resenha

Nesta seção serão apresentados alguns modelos que utilizam o método do estado de espaço (SS). O objetivo é apresentar as estruturas teóricas e técnicas empregadas neste artigo. Por se tratar de assunto consagrado na literatura internacional, apenas expomos os modelos e os procedimentos de espaço de estado, com ênfase nos modelos voltados para lidar com situações de valores omissos e *benchmarking*. Os

procedimentos de inicialização e estimação de parâmetros serão descritos no apêndice B e apenas para o modelo de nível local¹⁷. Os resultados apresentados nesta seção foram obtidos nas seguintes referências: Harvey (1990); Harvey and Koopman (1992); Koopman and Shephard (1992); Durbin & Queenneville (1997); Harvey and Koopman (1997); Doornik, Koopman & Shephard (1999); Harvey and Koopman (2000); Koopman, Harvey, Doornik & Shephard (2000), Durbin & Koopman (2004), DK.

3.2.1 Modelos Estruturais de Séries Temporais

Um modelo univariado pode ser escrito como

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + v_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{NID}(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad t = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

onde μ_t é a tendência, γ_t é o termo sazonal, ψ_t é o ciclo, v_t é um termo autoregressivo de primeira ordem e ε_t é o termo irregular. O componente estocástico de tendência é especificado como

$$\begin{aligned} \mu_t &= \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t, & \eta_t &\sim \text{NID}(0, \sigma_\eta^2) \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + \zeta_t, & \zeta_t &\sim \text{NID}(0, \sigma_\zeta^2), \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde β_t é a inclinação da tendência μ_t . O termo irregular ε_t , o erro do nível η_t , e o erro da inclinação ζ_t são mutuamente não correlacionados. O componente de inclinação da tendência pode ser excluído da especificação da tendência quando for apropriado.

O componente sazonal pode ser especificado sob a forma de variáveis dummies ou forma trigonométrica. O número de frequências sazonais em um período (e.g. o ano) é dado pelo inteiro s . A dummy sazonal é dada por

$$\gamma_{t+1} = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t+1-j} + \omega_j, \quad \omega_t \sim \text{N}(0, \sigma_\omega^2), \quad (3.3)$$

e a forma trigonométrica é representada pelo *quasi-random walk*

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} \gamma_{jt}, \quad (3.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_{j,t+1} &= \gamma_{jt} \cos \lambda_j + \gamma_{jt}^* \sin \lambda_j + \omega_{jt}, \\ \gamma_{j,t+1}^* &= -\gamma_{jt} \sin \lambda_j + \gamma_{jt}^* \cos \lambda_j + \omega_{jt}^*, \end{aligned} \quad j = 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor, \quad (3.5).$$

Um processo autoregressivo de primeira ordem¹⁸ é dado por

$$v_t = \rho_v v_{t-1} + \xi_t, \quad \xi_t \sim \text{NID}(0, \sigma_\xi^2), \quad 0 < \rho_v < 1 \quad (3.6).$$

Por hipótese, os distúrbios associados a cada componente do modelo são mutuamente não correlacionados.

O modelo formado por (3.1) e (3.2) é conhecido como modelo estrutural básico para séries temporais, doravante denominado SBM. Este modelo sem os componentes de sazonalidade, ciclo e AR(1) é chamado de modelo de tendência linear local. E o modelo em que a tendência não tem inclinação $\beta_t = 0$ é conhecido como modelo de nível local.

O modelo de uma equação pode incluir variáveis explanatórias exógenas, valores defasados da variável dependente e variáveis de intervenção, além de componentes não observados tais como tendência, sazonais e ciclo. Assim, (3.1) pode ser estendida para

¹⁷ Para detalhes do caso geral, ver DK (2004).

¹⁸ Por uma questão de espaço não são apresentados os modelos do componente de ciclo. Para detalhes, ver DK (2004).

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + v_t + \sum_{\tau=1}^p \phi_\tau y_{t-\tau} + \sum_{i=1}^k \sum_{\tau=0}^q \delta_{i\tau} x_{i,t-\tau} + \sum_{j=1}^h \lambda_j w_{j,t} + \varepsilon_t, \quad (3.7)$$

onde x_{it} é uma variável exógena, w_{jt} é uma variável de intervenção (dummy) e ϕ_τ , $\delta_{i\tau}$ e λ_j são parâmetros desconhecidos.

Modelos multivariados têm uma similaridade com os modelos univariados, exceto que y_t é agora um $p \times 1$ vetor (empilhado) multivariado de observações, que dependem de componentes não observados que também são vetores. Assim, no caso especial de um modelo multivariado com nível local temos

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim \text{NID}(0, \Sigma_\varepsilon), \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \eta_t, & \eta_t &\sim \text{NID}(0, \Sigma_\eta), \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde Σ_ε e Σ_η são ambas matrizes $p \times p$, e η_t e ε_t são mutuamente não correlacionados em todos os períodos. Os outros distúrbios no modelo geral (3.1) se tornam também vetores que têm matrizes de covariâncias $p \times p$. Neste modelo, conhecido como *SUTSE* (*seemingly unrelated time series equations*), cada série em y_t é modelada como no caso univariado, mas os erros podem estar correlacionados contemporaneamente através das séries. No caso do modelo com outros componentes tais como inclinação, ciclo e sazonais, os distúrbios associados com os componentes tornam-se vetores que têm matrizes de variância $p \times p$. O link através das p diferentes séries de tempo se dá através das correlações dos distúrbios subjacentes aos componentes.

O modelo multivariado com variáveis explanatórias e intervenções toma a seguinte forma

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + v_t + \sum_{\tau=1}^p \Phi_\tau y_{t-\tau} + \sum_{\tau=0}^s \delta_\tau x_{t-\tau} + \Lambda w_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

onde x_t é um vetor $K \times 1$ de variáveis explanatórias e w_t é um vetor $K^* \times 1$ de intervenções.

O tratamento estatístico de modelos estruturais de séries temporais se baseia em formas de estados de espaço. O modelo linear Gaussiano em estados de espaço é escrito na forma proposta por DK (2004). Assim,

$$\begin{aligned} y_t &= Z_t \alpha_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim \text{N}(0, H_t), \\ \alpha_{t+1} &= T_t \alpha_t + R_t \eta_t, & \eta_t &\sim \text{N}(0, Q_t), & t = 1, \dots, n, \\ \alpha_1 &\sim \text{N}(a_1, P_1), \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde y_t é um vetor de observações $p \times 1$, α_t um vetor de estado não observado $m \times 1$ e η_t um vetor de distúrbios aleatórios $r \times 1$. A idéia do modelo é que a evolução do sistema ao longo do tempo é determinado por α_t de acordo com a segunda equação de (3.10), mas desde que α_t não possa ser observado diretamente a análise deve ser baseada nas observações y_t .

A primeira equação é a equação de observações ou de medidas, e a segunda, a equação de estado.

As matrizes Z_t ($p \times m$), T_t ($m \times m$), R_t ($m \times r$), H_t ($p \times p$) e Q_t ($r \times r$) são inicialmente assumidas como conhecidas e os termos de erros ε_t e η_t são assumidos serem serialmente independentes e independentes entre si para todos os pontos do tempo. As matrizes Z_t e T_{t-1} podem depender de y_1, \dots, y_{t-1} . O valor inicial do vetor de estado α_1 é assumido ser $\text{N}(a_1, P_1)$, independentes de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ e η_1, \dots, η_n , onde a_1 e P_1

são assumidos serem conhecidos. Na prática algumas ou todas as matrizes dependerão de elementos de um vetor ψ de parâmetros desconhecidos¹⁹.

A primeira equação tem a estrutura de um modelo de regressão linear onde o vetor de coeficientes α_t varia ao longo do tempo. A segunda equação representa um modelo autoregressivo de primeira ordem²⁰. No caso particular em que $r < m$ e Q_t é não singular, a matriz R_t é chamada de matriz seleção, pois seleciona as linhas da equação de estado que têm termos de distúrbio não zero²¹.

O filtro de Kalman (KF) desempenha o mesmo papel para modelos de séries temporais em estados de espaços, que é o método dos mínimos quadrados em modelos de regressão. O KF é formado por um conjunto de recursões de vetores e matrizes. Eles permitem atualizar nosso conhecimento sobre os sistemas a cada vez que uma nova observação se faz disponível. A importância do KF repousa sobre os seguintes aspectos: (i) cômputo das previsões um passo à frente das observações e vetores de estado, e os correspondentes erros quadráticos médios; (ii) diagnóstico através dos erros de previsão um passo à frente; (iii) cômputo da função de verossimilhança através da decomposição do erro de previsão um passo à frente; (iv) suavização que usa os resultados do KF.

Denote o conjunto de observações y_1, \dots, y_t por Y_t . O filtro de Kalman é uma recursão para calcular $a_{t+1} = E(\alpha_{t+1} | Y_t)$ e $P_{t+1} = \text{Var}(\alpha_{t+1} | Y_t)$ dados a_t e P_t . A sua derivação envolve algumas propriedades da teoria da regressão multivariada normal. Desde que todas as distribuições sejam normais, as distribuições condicionais dos subconjuntos de variáveis, dados outros subconjuntos de variáveis, são também normais. A distribuição requerida é portanto determinada pelo conhecimento de a_{t+1} e P_{t+1} . Suponha então que α_t dado Y_{t-1} é $N(a_t, P_t)$.

A seguir são apresentados o conjunto de relações, equações recursivas, ou filtro de Kalman²² para atualizar o período $t+1$ a partir de t

$$\begin{aligned} v_t &= y_t - Z_t a_t, & F_t &= Z_t P_t Z_t' + H_t, \\ K_t &= T_t P_t Z_t' F_t^{-1}, & L_t &= T_t - K_t Z_t, & t &= 1, \dots, n, \\ a_{t+1} &= T_t a_t + K_t v_t & P_{t+1} &= T_t P_t L_t' + R_t Q_t R_t', \end{aligned} \quad (3.11)$$

com a_t e P_t representando, respectivamente, o vetor de médias e a matriz de variância do vetor de estados iniciais α_1 .

As equações de filtragem contemporânea incorporam o cálculo do estimador do vetor de estado $E(\alpha_t | Y_t)$ e sua associada matriz de variância de erros, que são denotadas respectivamente por $a_{t|t}$ e $P_{t|t}$. Assim, pode-se reformular as equações do filtro de Kalman²³ para

¹⁹ Este ponto é discutido brevemente no apêndice B, onde o modelo de nível local é apresentado. Para maiores detalhes ver Harvey (1990) e DK (2004).

²⁰ O modelo de tendência local, caso onde $\beta_t=0$ no modelo (3.1), é um caso particular do modelo (3.10).

²¹ Em muitas aplicações, R_t é a identidade – que não é o caso do modelo *SUTSE*. Em outras, pode-se definir $\eta_t^* = R_t \eta_t$ e $Q_t^* = R_t Q_t R_t'$ e prosseguir sem uma inclusão explícita de R_t , o que faz o modelo parecer mais simples. Contudo, se R_t é $m \times r$ com $r < m$ e Q_t é não singular, é mais vantajoso trabalhar com η_t ao invés de η_t^* singular. Neste caso, R_t é um subconjunto das colunas de I_m . Porém a teoria continua válida se R_t é uma matriz geral $m \times r$.

²² As relações para o modelo univariado são apresentadas no apêndice B.

²³ Quando se opera com um modelo de SS com tempo invariante, no qual as matrizes são constantes ao longo do tempo, a recursão de Kalman para P_{t+1} converge para \bar{P} , que é solução para a equação matricial $\bar{P} = T\bar{P}T' - T\bar{P}Z\bar{F}^{-1}Z\bar{P}T' + RQR'$, onde $\bar{F} = Z\bar{P}Z' + H$. A solução obtida após a convergência para \bar{P} é a solução de “steady state” do filtro de Kalman. O uso da solução de “steady state” implica economia de

$$\begin{aligned}
 v_t &= y_t - Z_t a_t, & F_t &= Z_t P_t Z_t' + H_t, \\
 M_t &= P_t Z_t' = \text{Cov}(\alpha_t, v_t), \\
 a_{t|t} &= a_t + M_t F_t^{-1} v_t, & P_{t|t} &= P_t - M_t F_t^{-1} M_t', \quad t = 1, \dots, n \quad (3.12) \\
 a_{t+1} &= T_t a_{t|t}, & P_{t+1} &= T_t P_t L_t' + R_t Q_t R_t',
 \end{aligned}$$

para valores dados de a_1 e P_1 .²⁴

Considere agora a estimação de α_t dada a série completa y_1, \dots, y_n . Denote o vetor empilhado (y_1', \dots, y_n') por y ; assim y e Y_n representado como vetor. Estimaremos α_t por sua média condicional e também a matriz da variância de erros $V_t = \text{Var}(\alpha_t - \hat{\alpha}_t) = \text{Var}(\alpha_t | y)$, para $t = 1, \dots, n$. O *approach* é o de construir as recursões $\hat{\alpha}_t$ e V_t sob a hipótese que $\alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$, onde a_1 e P_1 são conhecidos.

A suavização, como é conhecido esse processo, refere-se à estimação do vetor de estado α_t e dos vetores de distúrbios ε_t e η_t usando a informação disponível em toda a amostra y_1, \dots, y_n . A suavização é uma importante característica por ser a base para diversos aspectos, a saber: (i) extração do sinal, remoção da tendência e ajustamento sazonal; (ii) teste de diagnósticos para detectar e distinguir entre outliers e quebras estruturais usando resíduos auxiliares; (iii) algoritmo EM para estimação inicial de parâmetros; (iv) cálculo do score, definido como a primeira derivada da função de verossimilhança com respeito ao vetor de parâmetros.

O vetor de estado suavizado é portanto definido como as estimativas do vetor de estado usando o conjunto completo de dados. O vetor de estado suavizado forma a base para procedimentos como retirada de tendência e ajustamento sazonal através da forma de estado de espaço.

As equações de suavização para o vetor de estado estão apresentadas a seguir

$$\begin{aligned}
 r_{t-1} &= Z_t' F_t' v_t + L_t' r_t, & N_{t-1} &= Z_t' F_t^{-1} Z_t + L_t' N_t L_t, \\
 \hat{\alpha}_t &= a_t + P_t r_{t-1}, & V_t &= P_t - P_t N_{t-1} P_t, \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

para $t = n, \dots, 1$, inicializado com $r_n = 0$ e $N_n = 0$. As duas equações da esquerda fornecem em conjunto as recursões para a suavização dos estados $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n$. E com as duas equações da direita V_t , a matriz de variância dos estados suavizados pode ser calculada eficientemente. Desde que v_{t+1}, \dots, v_n sejam independentes, segue que $N_t = \text{Var}(r_t)$.

Essas equações são conhecidas como recursões de suavização dos estados. As equações (3.11) e (3.13) em conjunto são referenciadas como o filtro de Kalman e o suavizador, respectivamente.

Note que o caminho de filtragem e suavização é realizado para frente através das séries usando (3.11) e para trás através das séries usando (3.13), de modo a obter $\hat{\alpha}_t$ e V_t para $t = 1, \dots, n$. Durante o processo para frente, as quantidades v_t , F_t , K_t , a_t e P_t para $t=1, \dots, n$ precisam ser acumuladas. Alternativamente, pode-se acumular apenas a_t e P_t e recalculer v_t , F_t e K_t , usando a_t e P_t , o que não é usual devido ao fato de as dimensões de

tempo computacional, porque os cálculos para $F_t, K_t = M_t^{-1}$ e P_{t+1} não são mais necessários.

²⁴ Definindo o erro de estimação do estado como $x_t = \alpha_t - a_t$ com $\text{Var}(x_t) = P_t$, podemos investigar como esses erros estão relacionados entre si e com o erro previsto um passo à frente $v_t = y_t - E(y_t | Y_{t-1}) = y_t - Z_t a_t$. Desde que v_t seja parte de y_t ele não pode ser previsto do passado, daí os v_t 's serem chamados de inovações. Das relações do filtro de Kalman, segue que $v_t = Z_t x_t + \varepsilon_t$ e $x_{t+1} = L_t x_t + R_t \eta_t - K_t \varepsilon_t$. Analogamente para as relações de SS $y_t = Z_t \alpha_t + \varepsilon_t$ e $\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t$, obtemos as inovações do modelo de SS, i.e., $v_t = Z_t x_t + \varepsilon_t$ e $x_{t+1} = L_t x_t + R_t \eta_t - K_t \varepsilon_t$, com $x_1 = \alpha_1 - a_1$, para $t = 1, \dots, n$. E finalmente obtemos as recursões da variâncias de x_t , $P_{t+1} = \text{Var}(x_{t+1}) = T_t P_t L_t' + R_t Q_t R_t'$, desde que $\text{Cov}(x_t, \eta_t) = 0$.

v_t , F_t e K_t serem em geral relativamente pequenas em relação a a_t e P_t , o que torna pequena a acumulação extra requerida.

O foco agora é sobre as recursões para computar as estimativas suavizadas $\hat{\varepsilon}_t = E(\varepsilon_t | y)$ e $\hat{\eta}_t = E(\eta_t | y)$ dos vetores de distúrbios ε_t e η_t , dadas todas as observações y_1, \dots, y_n . Essas estimativas têm usos variados, particularmente para estimação de parâmetros e testes de diagnósticos.

As estimativas suavizadas padronizadas dos distúrbios são referidas como os resíduos auxiliares²⁵. Os gráficos destes resíduos em conjunto com testes de normalidade são instrumentos para detectar irregularidades tais com outliers, mudanças no nível ou na inclinação²⁶.

As equações de suavização para os vetores de erros são apresentadas a seguir

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_t &= H_t (F_t^{-1} v_t - K_t' r_t), & \text{Var}(\varepsilon_t | y) &= H_t - H_t (F_t^{-1} + K_t' N_t K_t) H_t, \\ \hat{\eta}_t &= Q_t R_t' r_t, & \text{Var}(\eta_t | y) &= Q_t - Q_t R_t' N_t R_t Q_t, \\ r_{t-1} &= Z_t' F_t^{-1} v_t + L_t' r_t, & N_{t-1} &= Z_t' F_t^{-1} Z_t + L_t' N_t L_t, \end{aligned} \quad (3.14)$$

para $t = n, \dots, 1$, onde $r_n = 0$ e $N_n = 0$. Essas equações podem ser reformuladas como

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_t &= H_t u_t, & \text{Var}(\varepsilon_t | y) &= H_t - H_t D_t H_t, \\ \hat{\eta}_t &= Q_t R_t' r_t, & \text{Var}(\eta_t | y) &= Q_t - Q_t R_t' N_t R_t Q_t, \\ u_t &= F_t^{-1} v_t - K_t' r_t, & D_t &= F_t^{-1} + K_t' N_t K_t, \\ r_{t-1} &= Z_t' u_t + T_t' r_t, & N_{t-1} &= Z_t' D_t Z_t + T_t' N_t T_t - Z_t' K_t' N_t T_t - T_t' N_t K_t Z_t \end{aligned}$$

para $t = n, \dots, 1$, que são computacionalmente mais eficientes, uma vez que são obtidas diretamente das matrizes do sistema Z_t e T_t que têm a propriedade de usualmente conterem muitos zeros e uns. Essas equações são chamadas de recursões de suavização dos distúrbios²⁷.

3.2.2 Missing Observations

Uma característica do *approach* de espaço de estado é a facilidade com a qual ele lida com modelos que tenham observações omissas. Suponha um modelo com tendência local em que as observações y_j com $j = \tau, \dots, \tau^* - 1$, estejam omissas para $1 < \tau <$

²⁵ Os resíduos auxiliares $\hat{\varepsilon}_t$ podem ser usados para identificar outliers na série y_t . Valores absolutamente grandes em $\hat{\varepsilon}_t$ indicam que o comportamento observado não pode ser apropriadamente representado pelo modelo sob consideração. A utilidade de $\hat{\eta}_t$ depende da interpretação dos elementos do vetor de estado α_t implicado pelo desenho das matrizes T_t , R_t , e Q_t . Para o modelo de nível local, o estado é o nível variante no tempo. Nesse caso, ξ_t – o elemento correspondente de α_t – é a mudança do nível para o período $t + 1$. Decorre que quebras estruturais na série y_t podem ser identificadas detectando-se grandes valores absolutos na série através de ξ_t . Da mesma forma, no modelo univariado de tendência local, o segundo elemento de ξ_t pode ser explorado para detectar mudanças na inclinação da série y_t . No caso dos erros padronizados de previsão um passo à frente $e_t = v_t / \sqrt{F_t}$, eles fornecem diagnósticos que podem ser interpretados como testes sobre a especificação do modelo. Grandes valores dos resíduos podem refletir um distanciamento do modelo e podem indicar ajustamentos específicos a serem feitos no modelo.

²⁶ Note-se que os resíduos auxiliares são serialmente correlacionados mesmo quando o modelo é corretamente especificado. Portanto, o teste de normalidade deve ser ajustado para ter em conta a correlação serial.

²⁷ A suavização dos distúrbios segue o mesmo padrão descrito para a suavização dos estados, ou seja, os cálculos são feitos para frente através da série usando o filtro de Kalman e depois para trás através da série usando (3.14) para obter $\hat{\varepsilon}_t$ e $\hat{\eta}_t$ juntamente com as correspondentes variâncias condicionais para $t = 1, \dots, n$. No entanto, as necessidades de acumulação de valores são menores, e os cálculos são mais rápidos, dado que não envolvem o vetor a_t e a matriz P_t .

$\tau^* \leq n$. No estágio de filtragem, o caminho para lidar com a situação é definir uma nova série y_t^* , onde $y_t^* = y_t$ para $t = 1, \dots, \tau-1$ e $y_t^* = y_{t+\tau^*-\tau}$ para $t = \tau, \dots, n^*$ com $n^* = n - (\tau^* - \tau)$. No caso univariado, o modelo para y_t^* no período $t = 1, \dots, n^*$ é o mesmo que o formado por (3.1) e (3.2) com $y_t = y_t^*$ exceto que $\alpha_t = \alpha_{t-1} + \eta_{t-1}$, onde $\eta_{t-1} \sim N[0, (\tau^* - \tau)\sigma_\eta^2]$. O tratamento é imediatamente estendido se mais do que um grupo de observações está omissos.

Entretanto, é mais fácil proceder usando o domínio temporal original. Para a filtragem nos tempos $t = \tau, \dots, \tau^* - 1$, temos

$$E(\alpha_t | Y_{t-1}) = E(\alpha_t | Y_{t-1}) = E(\alpha_t + \sum_{j=\tau}^{t-1} \eta_j | Y_{\tau-1}) = a_t \quad e$$

$$\text{Var}(\alpha_t | Y_{t-1}) = V(\alpha_t | Y_{t-1}) = \text{Var}(\alpha_t + \sum_{j=\tau}^{t-1} \eta_j | Y_{\tau-1}) = P_\tau + (t - \tau)\sigma_\eta^2,$$

dado que

$$a_{t+1} = a_t, \quad P_{t+1} = P_t + \sigma_\eta^2, \quad t = \tau, \dots, \tau^* - 1, \quad (3.15)$$

com os demais valores de a_t e P_t sendo dados pelo filtro de Kalman (B.2) para $t = 1, \dots, \tau$ e $t = \tau^*, \dots, n$. A consequência é que podemos usar o filtro original (B.2) para todos os t , fazendo $v_t = 0$ e $K_t = 0$ nos pontos de dados omissos. O mesmo procedimento é usado quando existe mais do que um grupo de observações omissas. Segue que trabalhar com dados omissos usando filtro de Kalman é bastante simples.

As recursões dos erros de previsão dos quais são derivadas as recursões de suavização são dadas por (B.4). Essas equações de atualização dos erros nos pontos de *missings* tornam-se

$$v_t = x_t + \varepsilon_t, \quad x_{t+1} = x_t + \eta_t, \quad t = \tau, \dots, \tau^* - 1,$$

desde que $K_t = 0$ e portanto $L_t = 1$. As covariâncias entre os estados nos pontos omissos e as inovações depois dos períodos de *missings* são dadas por

$$\text{Cov}(\alpha_t, v_{\tau^*}) = P_t, \quad \text{Cov}(\alpha_t, v_j) = P_t L_{\tau^*} L_{\tau+1} \dots L_{j-1}, \quad j = \tau^* + 1, \dots, n, \quad t = \tau, \dots, \tau^* - 1.$$

Deletando-se os termos associados com os pontos omissos, a equação de suavização dos estados (B.5) para os pontos omissos torna-se

$$\hat{\alpha}_t = a_t + \sum_{j=\tau^*}^n \text{Cov}(\alpha_t, v_j) F_j^{-1} v_j, \quad t = \tau, \dots, \tau^* - 1.$$

Substituindo os termos de covariância e tendo em conta (B.7), obtemos as recursões de suavização dos estados para os pontos omissos

$$r_{t-1} = r_t, \quad \hat{\alpha}_t = a_t + P_t r_{t-1}, \quad t = \tau, \dots, \tau^* - 1. \quad (3.16)$$

A consequência é que podemos usar o suavizador original dos estados (B.6) para todos os t , tomando $v_t = 0$ e $K_t = 0$ e assim $L_t = 1$ nos pontos omissos. Esta técnica se aplica a qualquer observação omissa pertencente ao período da amostra. Da mesma maneira, as equações para a variância do erro de estado e os distúrbios suavizados podem ser obtidos colocando $v_t = 0$ e $K_t = 0$ nos pontos omissos.

Note que a aplicação do filtro de Kalman sobre as observações omissas pode ser interpretada como extrapolação da série para os pontos omissos, enquanto a suavização destes pontos é efetivamente interpolação.

No caso multivariado para os períodos em há observações omissas, o vetor v_t e a matriz K_t do filtro de Kalman são igualadas a zero. E o filtro de Kalman torna-se

$$a_{t+1} = T_t a_t, \quad P_{t+1} = T_t P_t T_t' + R_t Q_t R_t', \quad t = \tau, \dots, \tau^* - 1; \quad (3.17)$$

similantemente, as recursões de suavização para trás tornam-se

$$r_{t-1} = T_t' r_t, \quad N_{t-1} = T_t' N_t T_t, \quad t = \tau^* - 1, \dots, \tau. \quad (3.18)$$

As outras equações relevantes para a suavização permanecem as mesmas.

Suponha que no tempo t alguns, mas não todos os elementos do vetor de observações y_t sejam omissos e seja y_t^* o vetor de valores de fato observados. Então $y_t^* = W_t y_t$, onde W_t é uma matriz conhecida cujas linhas são um subconjunto das linhas de I_p . Conseqüentemente, nas datas em que todos os elementos de y_t estão disponíveis, a primeira equação de (3.10) é substituída pela equação

$$y_t^* = Z_t^* \alpha_t + \varepsilon_t^*, \quad \varepsilon_t^* \sim N(0, H_t^*), \quad (3.19)$$

onde $Z_t^* = W_t Z_t$, $\varepsilon_t^* = W_t \varepsilon_t$ e $H_t^* = W_t H_t W_t'$. O filtro de Kalman e o suavizador então procedem como no caso padrão, desde que y_t , Z_t e H_t sejam substituídos por y_t^* , Z_t^* e H_t^* nos pontos relevantes do tempo. A dimensão do vetor de observações varia sobre o período, mas isto não afeta a validade das fórmulas. Os elementos omissos podem ser apropriadamente estimados pelos elementos de $Z_t \hat{\alpha}_t$, onde $\hat{\alpha}_t$ é o valor suavizado.

3.2.3 Benchmarking

Um problema comum em estatísticas oficiais é o ajustamento de observações mensais e trimestrais, obtidas através de levantamentos ou amostragem e portanto sujeitas a erros, com os dados anuais totais obtidos através de censos ou levantamentos mais detalhados, e que são por esta razão assumidos livres dos erros de amostragem. O total anual é chamado de *benchmark*, e o processo de ajuste, *benchmarking*. O próximo passo é mostrar como este problema pode ser manuseado dentro de uma estrutura de espaço de estado.

Denote as observações mensais obtidas em *surveys*, supostos realizados mensalmente ($s = 12$), por y_t e os verdadeiros valores que se deseja estimar por y_t^* para $t = 12(i - 1) + j$, $i = 1, \dots, l$ e $j = 1, \dots, 12$, onde l é o número de anos. Assim, o erro do *surveys* é $e_t = y_t - y_t^*$, denotado por $\sigma_t^s \xi_t^s$ onde σ_t^s é o desvio padrão do erro de survey no tempo t . O erro é modelado como um processo AR(1) com variância unitária²⁸. Em princípio processos ARMA de ordem mais alta podem ser usados. Assuma que os valores de σ_t^s estejam disponíveis a partir da prática dos *surveys* e que os erros sejam livres de viés.

Os valores de *benchmark* são dados por $x_t = \sum_{j=1}^{12} y_{12(i-1)+j}^*$ para $i = 1, \dots, l$. Suponha que os valores anuais estejam disponíveis para todos os anos de estudo, assim na prática os valores censitários terão em geral uma defasagem de um ano ou dois em relação as observações dos *surveys*. Como modelo da série de observações usamos

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \sum_{j=1}^k \delta_{jt} w_{jt} + \varepsilon_t + \sigma_t^s \xi_t^s, \quad t = 1, \dots, 12l, \quad (3.20)$$

onde μ_t é a tendência, γ_t é a sazonal e o termo $\sum_{j=1}^k \delta_{jt} w_{jt}$ representa os efeitos sistemáticos tais como a influência das variações de calendário que tenham um efeito substancial sobre as quantidades, como vendas a varejo, mas que podem variar lentamente ao longo do tempo.

A série é organizada da seguinte forma

$$y_1, \dots, y_{12}, x_1, y_{13}, \dots, y_{24}, x_2, y_{25}, \dots, y_{12l}, x_l.$$

²⁸ Isto é, $\xi_{t+1} = \phi \xi_t + \kappa_t$, onde $|\phi| < 1$ e $\kappa_t \sim (0, 1)$.

Considere que o instante na série em que o *benchmark* x_t ocorre é $t = (12i)'$; assim o instante $t = (12i)'$ ocorre na série entre $t = 12i$ e $t = 12i + 1$ ²⁹.

Tomando o modelo de random walk integrado³⁰ para o componente de tendência e o modelo (3.3) para a componente sazonal, temos

$$\Delta^2 \mu_t = \xi_t, \quad \gamma_t = -\sum_{j=1}^{11} \gamma_{t-j} + \omega_t.$$

Note que é conveniente colocar os erros das observações – de medida – dentro do vetor de estado; assim temos

$$\alpha_t = (\mu_t, \dots, \mu_{t-11}, \gamma_t, \dots, \gamma_{t-11}, \delta_{1t}, \dots, \delta_{kt}, \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-11}, \xi_t^s)'$$

Assim, $y_t = Z_t \alpha_t$ onde

$$Z_t = (1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, w_{1t}, \dots, w_{kt}, 1, 0, \dots, 0, \sigma_t^s), \quad t = 1, \dots, n,$$

e $x_i = Z_t \alpha_t$ onde

$$Z_t = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \sum_{s=12i-11}^{12i} w_{1s}, \dots, \sum_{s=12i-11}^{12i} w_{ks}, 1, \dots, 1, 0), \quad t = (12i)',$$

para $i = 1, \dots, l$. Pode-se então escrever a transição de α_t para α_{t+1} entre $t = 12i - 11$ e $t = 12i - 1$, tomando em conta o fato de que $\delta_{j,t+1} = \delta_{jt}$. De $t = 12i$ para $t = (12i)'$ a transição é a identidade. De $t = (12i)'$ para $t = 12i + 1$, a transição é a mesma que de $t = 12i - 11$ para $t = 12i - 1$ ³¹.

A matriz de transição T_t é uma matriz bloco-diagonal com elementos

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0_{1,10} \\ I_{11} & 0_{1,1} & \\ I_{11} & 0_{1,1} & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I'_{11} & 0_{1,1} \\ I_{11} & 0_{1,1} \end{bmatrix}, I_k, \begin{bmatrix} 0_{1,12} & \\ I_{11} & 0_{1,1} \end{bmatrix}, \phi \quad \text{para } t = 1, \dots, n,$$

e I_{37+1} quando $t = (12i)'$, $i = 1, \dots, l$. O vetor de erros de estado é $v_t = [\xi_t, \omega_t, \varepsilon_t, \kappa_t]$, se $t = 12i + 2, \dots, 12(i + 1)$, e $v_t = [\eta_t, \omega_t, \zeta_{1t}, \dots, \zeta_{kt}, \varepsilon_t, \kappa_t]'$, se $t = 12i + 1$, $i = 1, \dots, l$ e $v_t = 0$ para $t = (12i)'$, $i = 1, \dots, l$. Os demais termos do modelo estão descritos acima.

Assim, usou-se uma forma modificada do modelo de espaço de estado introduzido no começo da seção 3.21, modelo este em que a variância do erro da equação de observações é zero para $t = 1, \dots, n$ e é a variância do *benchmark* para $t = (12i)'$, $i = 1, \dots, l$. Suponha também que a matriz dos erros de survey Σ_e seja uma matriz diagonal porque, de outra forma, o vetor de estado se tornaria muito grande. A equação de transição é dada por

$$\alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + R_t v_t, \quad t = 1, \dots, 12, (12)', 13, \dots$$

onde R_t é a matriz de seleção formada apropriadamente pelas colunas de I_{37+k} .

Essencialmente, este exemplo mostrou que o *approach* de espaço de estado pode ser usado para lidar com situações em que os dados advêm de duas fontes diferentes.

3.3 Descrição dos Procedimentos e das Dificuldades de Estimação

²⁹ Segundo DK e DQ, podemos assumir que os coeficientes do *trading day* são atualizados apenas uma vez ao ano, em janeiro; assim para estes coeficientes, o modelo será

$$\delta_{j,12i+1} = \delta_{j,12i} + \zeta_{j,12i}, \quad j = 1, \dots, k, \quad i = 1, \dots, l, \quad \delta_{j,t+1} = \delta_{jt}, \quad \text{em caso contrário.}$$

³⁰ Este é um caso particular do modelo (3.8), onde $\sigma_\xi^2 = 0$. Nesse caso, este efeito pode ser representado substituindo a segunda e a terceira equações de (3.8) por $\Delta^2 \mu_{t+1} = \zeta_t$, i.e., $\mu_{t+1} = 2\mu_t - \mu_{t-1} + \zeta_t$.

³¹ Exceto que tomamos em conta a relação $\delta_{j,12i+1} = \delta_{j,12i} + \zeta_{j,12i}$ onde $\zeta_{j,12i} \neq 0$.

O PIB trimestral foi estimado utilizando-se modelos de estado de espaço univariados e multivariados. Foram estimados três modelos estruturais univariados, um com *missing values*, um com processo de *benchmarking* e um terceiro com *missing* e *benchmarking*. E um modelo estrutural multivariado, *SUTSE*, que é uma generalização do modelo estrutural básico. Ao todo, temos três famílias de modelos estruturais.

As estimações foram feitas para o período 1960 a 1996, com as mesmas variáveis do modelo da seção (3.1) e com as séries em índices, à exceção do modelo com processo de *benchmarking*, no qual se utilizaram as séries em quantidades e o PIB foi estimado em valores reais de 1980. Neste caso, a soma dos trimestres de cada ano é diferente do PIB anual computado oficialmente; mas para as demais séries, o total anual é igual à soma das quantidades/valores trimestrais.

A razão que nos conduziu a estimar vários modelos concorrentes foi a ocorrência de problemas computacionais, já que a princípio o objetivo era estimar o PIB através dos modelos com *benchmarking* e com *missing values*, para o período 1960 a 1980.

O primeiro problema computacional residiu na implementação do pacote *SsfPack3*, que usa como ambiente o *OxPack for GiveWin*, para ajustar o modelo estrutural com *benchmarking*. Assim, apesar de as estimações terem sido exitosas no que concerne à correção do erro de medida dos PIBs trimestrais, elas são preliminares e serão objeto de revisões futuras.

Outro ponto é que o *software Eviews51*, apesar de possuir um ferramental aparentemente adequado para estimar modelos em estado de espaço, apresenta falhas constantes em seu algoritmo de otimização da função de verossimilhança quando esta apresenta trechos “achatados” (*flat*) – o que parece ser o nosso caso –, levando o procedimento a interromper o processo de iteração e a não completar “adequadamente” as recursões. A confiabilidade dos seus resultados em modelos univariados pareceu razoável, mas não sabemos quão confiável é o procedimento quando lidando com modelos multivariados.

Por último, o pacote mais “amigável” e especializado em lidar com modelos estruturais em espaço de estado, o *Stamp63*, não lida com estimações que envolvam séries que tenham *missing values*, nem estimações com *benchmarking*. Assim, o seu uso é limitado a problemas em que o objetivo é determinar os componentes estruturais das séries.

Em resumo, consideradas essas dificuldades procuramos extrair de cada pacote o melhor resultado que ele pudesse gerar, e, no fim comparar as estimativas, admitindo desde logo que estudos futuros deverão dar continuidade aos resultados deste artigo.

Como dito na seção 3.1, o ponto de partida é o índice do PIB trimestral estimado através dos coeficientes da equação estática do procedimento de Engle-Granger, para dados anuais, usando as séries de índice do PIB, da produção de veículos, cimento, consumo industrial de energia elétrica na região Rio–São Paulo e receita tributária federal real. Esta série estimada será denominada YQ.

Os experimentos preliminares com modelos estruturais básicos e modelos multivariados com as séries acima e o PIB estimado com frequência trimestral, indicaram a presença de uma forte heterocedasticidade, que, se não tratada comprometeria os resultados estimados.

A heterocedasticidade no período 1960 a 1996 tem relação com o comportamento da taxa de crescimento da economia: um longo período de crescimento de 1960 a 1980, seguido de um período recessivo e taxas de crescimento oscilantes, sem tendência definida. Assim como, guarda relação com o comportamento da taxa de

inflação³². A partir de 1973, a taxa de inflação entra numa rota ascendente, intercalada por períodos de quedas violentas derivadas dos congelamentos de preços. A partir de meados de 1994, com o Plano Real, ela cai abruptamente e passa a seguir uma rota declinante³³.

A solução segue o caminho dos mínimos quadrados ponderados. O procedimento é tratar a heterocedasticidade através da normalização das séries com uma série que seja proporcional aos recíprocos dos desvios padrão dos erros.

Uma série adequada seria então aquela que guardasse relação com o PIB e com a inflação. A receita tributária nominal pela teoria, *coeteris paribus*, deve guardar uma relação de endogeneidade com o PIB e a inflação. No caso da economia brasileira, diversas modificações na tributação foram efetuadas durante o período, o que conduziu a um aumento progressivo e exógeno da receita tributária real.

A opção como fator de ponderação recaiu sobre a receita tributária real³⁴. Como a série está disponível mensalmente, calculou-se a receita do trimestre e, a partir dela, a série de índice. Com isso a receita tributária real deixa de ser uma variável isolada e passa a compor combinações com as demais. No que concerne ao PIB, esta série dividida pelo índice da receita tributária passará a ser a variável a ser estimada – PIB ponderado. O índice de PIB estimado será recuperado multiplicando-se o PIB ponderado estimado pelo índice da receita.

Experimentos com a estimação de modelos estruturais básicos com a nova série ponderada do PIB indicaram uma falha no processo de estimação dos componentes estruturais. Decorrente do surgimento de *spikes* antes inexistentes na série YQ. A solução foi estimar um modelo BSM³⁵ para a série de receita real e extrair os outliers identificados na série de resíduos auxiliares da equação de medida e a quebra observada nos resíduos da equação de estado³⁶.

Portanto, para corrigir a heterocedasticidade identificada será utilizada a série de receita tributária, devidamente tratada com *pulses and breaks*. As novas séries ajustadas aparecem na figura A8 do apêndice.

Para efeito das estimações, os parâmetros foram tomados com tendo densidade a priori difusa. Assim, não foram supostos valores a priori da matriz de covariância, embora *priors* para os coeficientes das variáveis explicativas tenham sido utilizados nas estimações feitas no Eviews.

O primeiro modelo estimado (PIB1) considera a presença de *missing values* na série do PIB trimestral, no período que antecede a 1980. O modelo utilizado foi o modelo estrutural básico com tendência, mas sem *slope*, com dummies sazonais estocásticas, termo irregular e variáveis explicativas – modelo formado pelas equações (3.1), (3.2) e (3.3) O procedimento de estimação com *missing observations* está descrito

³² A taxa de inflação é definida como a variação percentual do IGP-DI da FGV.

³³ Taxas de inflação “elevadas” trazem insegurança e aumentam a incerteza do ambiente de negócios. O que por sua vez induz e aumenta a volatilidade das séries econômicas.

³⁴ A taxa de inflação seria uma ótima candidata, não fossem os congelamentos de preços ocorridos durante o período, os quais levaram a taxa de inflação próxima de zero. Assim, a divisão de uma série por ela tem como resultado a geração de outliers de difícil tratamento. Isto é, a extração de um grande “outlier” implica o surgimento de outros, que, se extraídos, geram outros, e assim por diante.

³⁵ O modelo utilizado inclui componente estrutural de tendência sem drift, ciclo de curta duração, dummies sazonais trigonométricas e termo irregular.

³⁶ O critério para extração foi o resíduo normalizado assumir um valor maior do que 3.5. Foram feitas intervenções nos trimestres 1980.3, 1986.1, 1986.4, 1989.3, 1990.2, 1991.4, 1992.1 do termo irregular e uma intervenção no nível da série em 1989.4.

na seção 3.2.1. O modelo foi estimado em Eviews51, que usa o procedimento descrito em Koopman, Shephard & Doornik (1999) para estimações com *missings*³⁷.

A variável do lado esquerdo da equação de medida é a série de índice do PIB ponderado (YQP) com valores observados de 1980 a 1996, e com valores omissos de 1960 a 1979 os quais desejamos estimar. Se o período anterior a 1980 for inteiramente coberto com valores omissos o pacote não realiza adequadamente as recursões. Então, da série estimada de PIB (YQP) selecionou-se aleatoriamente 50% da amostra para assumirem valores omissos, para os trimestres anteriores a 1980³⁸. O procedimento é, então, estimar através do filtro de Kalman os valores omissos e em seguida suavizá-los recursivamente.

As variáveis explicativas – veículos, cimento e energia elétrica – devidamente ponderadas entram no lado direito da equação de medida apropriadamente estacionarizadas³⁹, conforme recomendado por Durbin e Koopman, (2004). Os resultados aparecem na próxima seção.

O segundo modelo univariado é o de *benchmarking*. Como descrito na seção 3.2.2, o *benchmarking* corrige os erros de medida ocorridos nos levantamentos trimestrais, que se supõem calculados de forma “imprecisa”. O processo de correção é feito de maneira que a soma dos trimestres seja a igual ao total anual, suposto livre de erros. O erro de medida é suposto seguir um processo AR(1); ver seção 3.2.2.

Este modelo foi estimado com a série do PIB trimestral em valores reais de 1980, calculada conforme descrito no apêndice A.1.1, e com as demais séries nas suas unidades de medidas. A exceção da receita tributária que entrou como fator de ponderação na forma de índice trimestral médio do ano⁴⁰. A estimação foi feita em SsfPack3. As séries usadas estão plotadas na figura A9.

³⁷ Vale a pena ter em conta que o pacote funciona “mais” apropriadamente quando são fornecidos *priors* dos valores iniciais, matriz de covariância e valores dos coeficientes do sistema – que, na maior parte dos casos se confundem com os antilogaritmos das covariâncias.

³⁸ A seleção foi realizada utilizando 61 pseudo-números aleatórios extraídos de uma normal (0,1). Desses números, as primeiras duas casas decimais em módulo eram usadas para escolher uma posição entre 1 e 80, à qual se atribuía um *missing*. Foram necessários 61 números para conseguir selecionar 40, já que alguns eram repetidos e outros superiores a 80. É obvio que se usou uma *random seed*.

³⁹ O teste clássico para a presença de raízes unitárias sazonais, HEGY, em geral rejeita a hipótese nula. E tal como apontado em Maddala e Kim (2002), apresenta várias deficiências. Por esse teste, concluiríamos que não existem raízes unitárias sazonais em nenhuma das variáveis explicativas utilizadas. Além disso, caso houvesse raízes sazonais, os filtros que se sobrepõem ao de primeiras diferenças são de difícil “manejo”. Isto é, as séries sazonalmente filtradas acabam possuindo termos negativos de média móvel que antes não apareciam, além de outras perturbações no correlograma. A solução utilizada para detectar e, se for o caso, tratar um componente sazonal estocástico foi pesquisar o comportamento estocástico da série através de modelos de estado de espaço. Coincidentemente, o mesmo modelo foi ajustado para todas as séries. Assim, foi estimado um modelo com tendência linear local, com sazonalidade trimestral e um termo AR(1) para reduzir a correlação serial. Todas as séries apresentaram componentes sazonais estocásticos. Nas séries de veículos e energia elétrica o termo AR(1) estacionário dominou o componente irregular; com isto este último foi retirado. Nesses casos, as séries estacionarizadas são representadas por este componente estrutural. No caso da série cimento, o termo AR(1) apresenta um coeficiente de correlação serial próximo de um (0.89). A série estacionarizada é representada pelo termo irregular suavizado.

⁴⁰ A razão do procedimento é que a receita real expressa em “reais” de 1980, assume valores muito baixos devido às conversões monetárias causadas pela inflação, o que faz os valores divididos pela série explodirem. Tornando o procedimento estatístico e computacional pouco manejável. *Last but not least*, o uso da média anual tem como objetivo preservar a relação de *benchmarking* das séries, a exceção do PIB, é claro.

O modelo de estimação foi o Gaussiano linear geral (3.10), com nível, dummies sazonais, sem efeito calendário e sem variáveis explicativas⁴¹. O modelo obedece a estrutura do modelo com processo *benchmarking* tal como descrito na seção 3.2.2.

As matrizes Z_t , T_t , e R_t construídas para operacionalizar as estimações com *benchmark* estão apresentadas no apêndice C. O primeiro grupo de matrizes refere-se a estimação do modelo univariado reportado na seção 4 e não contém efeito calendário. Essas matrizes escritas para os dados trimestrais e totais anuais, também constituem o primeiro passo para a implementação do modelo multivariado com quatro variáveis dependentes, que não chegou a ser estimado. O segundo grupo de matrizes refere-se ao modelo multivariado.

Cabe ainda observar que a solução encontrada para tratamento da heterocedasticidade não implicou nenhum tipo de não-linearidade nos moldes descritos por Durbin & Queenneville (1997). O que fizemos foi uma transformação de variáveis, estimar o modelo de tal maneira que os valores trimestrais fossem corrigidos para que a soma dos trimestres fosse igual ao total anual. Após, então, é feita a recuperação do PIB trimestral multiplicando o PIB transformado estimado pela variável índice anual da receita tributária.

Esse procedimento de tratamento da heterocedasticidade é uma alternativa ao modelo multiplicativo proposto por DQ (1997), o qual incorre em não-linearidades, sendo que a metodologia que propomos é computacionalmente mais eficiente, além de permitir que chequemos através da inovação padronizada se tratamos corretamente a heterocedasticidade. O que não é claro em DQ se isto é possível⁴².

Fizemos também um exercício de modelo *benchmarking* contendo valores omissos. Estes valores foram concentrados no período anterior a 1980 e escolhidos pela sua atipicidade⁴³. As demais características modelo são como descritas acima.

O último modelo estimado foi um modelo multivariado do tipo *SUTSE* – modelo (3.10) – onde as quatro variáveis estão endogeneizadas. As séries são usadas em índices, divididas previamente pelo índice da receita tributária ajustada de outliers (figura A8). A especificação envolve uma tendência local para cada variável, dummies sazonais na forma trigonométrica – porque no modelo lidaram melhor com a correlação serial presente –, e variáveis explicativas estacionarizadas, também para tratamento da correlação serial (ver DK, 2004). No caso, a escolha recaiu sobre a série de automóveis com seis defasagens.

⁴¹ Outro aspecto interessante, é que é mais conveniente trabalhar com o PIB em valores, porque os PIBs trimestrais corrigidos devem totalizar o PIB anual livre de erros de medida, enquanto o índice anual é o resultado de uma multiplicação de razões entre os termos sem erros. Assim, os índices trimestrais com erro de medida deveriam ser corrigidos de modo que o acúmulo deles durante o ano fosse tal que multiplicado pelo índice do PIB do ano anterior resultasse no índice do ano seguinte, o que tornaria o modelo multiplicativo (note-se que o modelo adotado é aditivo) e portanto não-linear, implicando que a metodologia utilizada não mais se aplicaria. De fato, deveríamos primeiro tomar logs dos Y 's para depois exponenciar os componentes da matriz de X de totais anuais, o que levaria a uma não-linearidade com complicações computacionais que transcendem os objetivos deste artigo. Pelas mesmas razões, não foram feitas transformações logarítmicas dos dados com o objetivo de mudança de escala e redução da heterocedasticidade. Para uma vigorosa solução do modelo de *benchmarking* multiplicativo, ver Durbin & Queenneville (1997).

⁴² O que queremos dizer é que não aparece no artigo de DQ uma expressão para as inovações padronizadas. Há apenas uma passagem na seção 5 mencionando as dificuldades do approach para cômputo de \hat{v}_t e a possibilidade de que poderiam ser usados valores iniciais, que seriam atualizados em cada etapa do processo iterativo descrito (DQ, 1997).

⁴³ Foram retirados da amostra os PIBs dos trimestres 1966.1 a 1966.4, 1973.4, 1975.1, 1976.1, 1979.1, 1994.1 e 1994.2. Os dois últimos foram excluídos por terem exatamente o mesmo valor.

O interesse deste último modelo é exatamente o de apresentar a extração das componentes estruturais em um ambiente multivariado e comparar com os resultados dos modelos univariados. O PIB reportado não inclui o componente irregular por ser este uma estimativa do distúrbio aleatório. Assim, sem esse termo, o PIB estimado fornece uma informação sobre a capacidade dos componentes de tendência e sazonalidade estocástica de cada variável explicar o seu comportamento.

4. Resultados

Nas tabelas 2 e 3 a seguir são apresentados os testes de diagnósticos dos modelos estimados descritos na seção anterior⁴⁴. O modelo PIB1 refere-se ao modelo com *missings*, o PIB2 com *benchmarking* e, o PIB3 com *missings* e *benchmarking*. O modelo PIB4 é o modelo multivariado estrutural *SUTSE*.

Para o modelo PIB1, na figura 2 apresentam-se o gráfico das inovações padronizadas juntamente com as funções de autocorrelação, espectro, periodograma, histograma e o *plot* do QQ. Na figura 3, aparecem os componentes extraídos suavizados, e na figura 4, ao lado dos resíduos auxiliares padronizados do modelo PIB1, aparece o respectivo histograma sobreposto ao gráfico da densidade estimada⁴⁵.

No que concerne aos resultados do modelo PIB1, a avaliação é que a estimação foi um sucesso surpreendente. Com as inovações não apresentando sinais de correlação serial, com ausência de heterocedasticidade e distribuição aproximadamente normal, além de o modelo apresentar boa aderência aos dados.

As estimativas suavizadas dos resíduos auxiliares têm distribuição aproximadamente normal e um traçado que permite concluir pela ausência de outliers na série de PIB1 e quebras no nível do vetor de estado. Embora não reportemos os testes esses resíduos, como esperado, possuem elevada correlação serial (ver DK, 2004).

É importante notar que não há quaisquer indicações de quebras no termo de nível, nem da presença de outliers em 1980, um ano crítico, dado que nele ocorre o encadeamento da série estimada para dar o *start up* do processo e a série publicada pelo FIBGE⁴⁶. Podemos concluir que o modelo estimado capturou adequadamente os

⁴⁴ A notação segue a literatura. Assim LogL representa o valor da função log de verossimilhança em $\hat{\theta}$, ao lado do número de iterações requeridas para convergência aparece o tipo de convergência, P.E.V. é a *prediction error variance*. DH é o teste de normalidade de Doornik-Hansen com distribuição aproximada χ^2 . H(h) é o teste para presença de heterocedasticidade de Goldfeld-Quandt com distribuição aproximada F(h,h). DW é estatística de Durbin-Watson com distribuição aproximada N(2,4/T). Q(P) é a estatística de Ljung-Box baseada sobre as P primeiras autocorrelações dos resíduos, com distribuição aproximada χ^2 com graus de liberdade igual a P menos o número de parâmetros estimados. CumPer, é a estatística associada ao periodograma acumulado, que é uma estatística de Kolmogorov-Smirnov, e pode ser vista como um teste de heterocedasticidade no domínio das frequências e como um teste de correlação serial no domínio temporal. Os coeficientes de determinação são reportados para as séries em níveis, diferenças e para diferenças sazonais. Por fim são reportados os critérios de informação de Akaike e Schwartz (Bayes).

⁴⁵ À guisa de exemplo apresentamos, o Filtro de Kalman estimado para o modelo.

```
@SIGNAL YRTNNA4 = 1.362888582*CIMRTNADJ_STA + 0.108953497*EERTNADJ_STA(-1) +
0.2851566766*AUTORTNADJ_STA + SV1 + SV2 + [ENAME = E1, VAR = EXP(-28.96329)]
@STATE SV1 = SV1(-1) + [ENAME = E2, VAR= EXP(-6.624560515)]
@STATE SV2 = - SV2(-1) - SV3(-1) - SV4(-1) + [ENAME = E3, VAR = EXP(-9.488966082)]
@STATE SV3 = SV2(-1)
@STATE SV4 = SV3(-1)
```

⁴⁶ Para corroborar esta afirmativa, fizemos uma regressão da série PIB1, em níveis e em diferenças, contra termos determinísticos (constante, tendência e dummies sazonais), estimada por mínimos quadrados

componentes estruturais da série, o que provavelmente decorreu de a sazonalidade ter sido especificada estocasticamente. Como mostra a figura 3, o padrão de sazonalidade oscila ao longo do tempo.

TABELA 2: TESTES DE DIAGNÓSTICOS

Modelos	PIB1 ¹	PIB2	PIB3
Estatísticas			
LogL	110.236	229.262	203.655
Iterations	16 (strong)	64 (strong)	61 (strong)
P.E.V.	0.0030	NA	NA
Std. Error	0.0549	NA	NA
DH	0.0008 [0.9996] ³	21.895 [0.0000]	67.648[0.0000] ⁴
H(h)	1.2269 [0.2430] ⁵	0.7382 [0.8747.] ⁶	1.3209[0.1548] ⁷
DW	1.9540 [0.7576]	1.8561 [0.3278]	1.7346 [0.0863]
Q(12)	16.505 [0.1234]	12.964 [0.3717]	16.522 [0.168]
CumPer (K-S) ²	0.0877	0.1544	0.1134
R2	0.9377	NA	NA
RD2	0.7307	NA	NA
AIC	-1.9483	-5.3337	-5.2086
SIC (Bayes)	-1.7985	-5.1729	-5.0406

(1) 107 observações válidas; (2) K-S(0.10)=0.1078; (3) O teste utilizado foi o de Bera-Jarque, que também tem distribuição aproximada χ^2 . (5) h = 47; (6) h = 58; (7) h = 54.

TABELA 3: TESTES DE DIAGNÓSTICOS

Modelo Multiv.	PIB4			
	PIB	CIM	EE	AUTO
Estatísticas				
LogL	1457.73	1457.73	1457.73	1457.73
Iterations	38 (Very Strong)	38	38	38
P.E.V.	0.0088	0.0068	0.0103	0.0117
Std. Error	0.0938	0.0825	0.1017	0.1079
DH	2.8403 [0.2417]	4.2242 [0.1210]	0.6834 [0.7105]	0.2926 [0.8639]
H(46)	0.5234 [0.9848]	0.6467 [0.9285]	1.0551[0.4282]	1.3326 [0.1668]
DW	1.8763 [0.4611]	1.9279 [0.6675]	1.8781 [0.4677]	1.8263 [0.3007]
Q(10)	13.667 [0.0909]	10.423 [0.2366]	13.986 [0.0821]	9.2378 [0.3226]
CumPer (K-S)	0.1991	0.1181	0.2270	0.1537
R2	0.8112	0.6041	0.7272	0.6424
RD2	0.4631	0.4855	0.4515	0.5275
RS2	0.3384	0.3584	0.3269	0.4242
AIC	-3.7610	-4.0187	-3.6007	-3.4809
SIC (Bayes)	-2.3247	-2.5824	-2.1644	-2.0446

Um ponto fraco nos resultados é o baixo valor relativo da função log de verossimilhança maximizada, o que se deve provavelmente às limitações do software em que as estimações foram feitas. Possivelmente, com um número superior de iterações⁴⁷, os resultados seriam mais precisos, posto que as recursões teriam sido

recursivos. Os coeficientes, assim como seus intervalos de confiança não apresentam mudanças de comportamento em 1980, apesar de serem bastante instáveis. Os resultados estão disponíveis aos interessados.

⁴⁷ O que não foi possível obter no Eviews com a especificação envolvendo *missing values*.

realizadas mais “apropriadamente”. Outro aspecto é que o experimento foi realizado para apenas uma amostra de dados anteriores a 1980. O adequado seria fazer várias amostragens e comparar a sensibilidade dos resultados com as variações amostrais.

FIGURA 2: Inoculações do Modelo PIB1

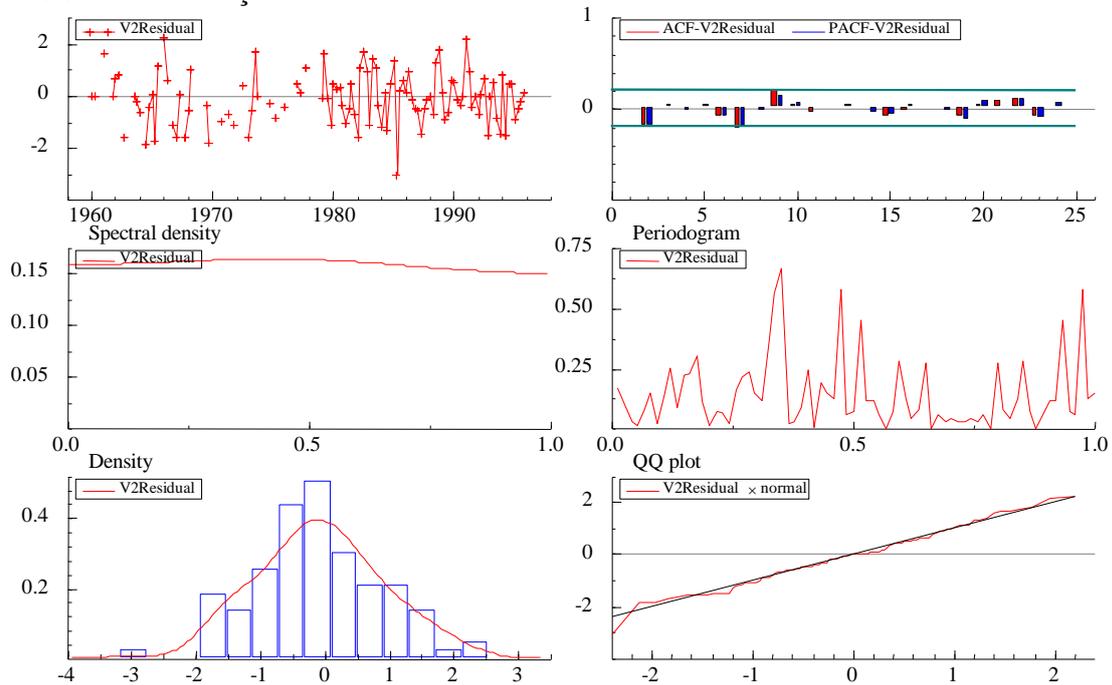


FIGURA 3: Componentes Extraídos do Modelo PIB1

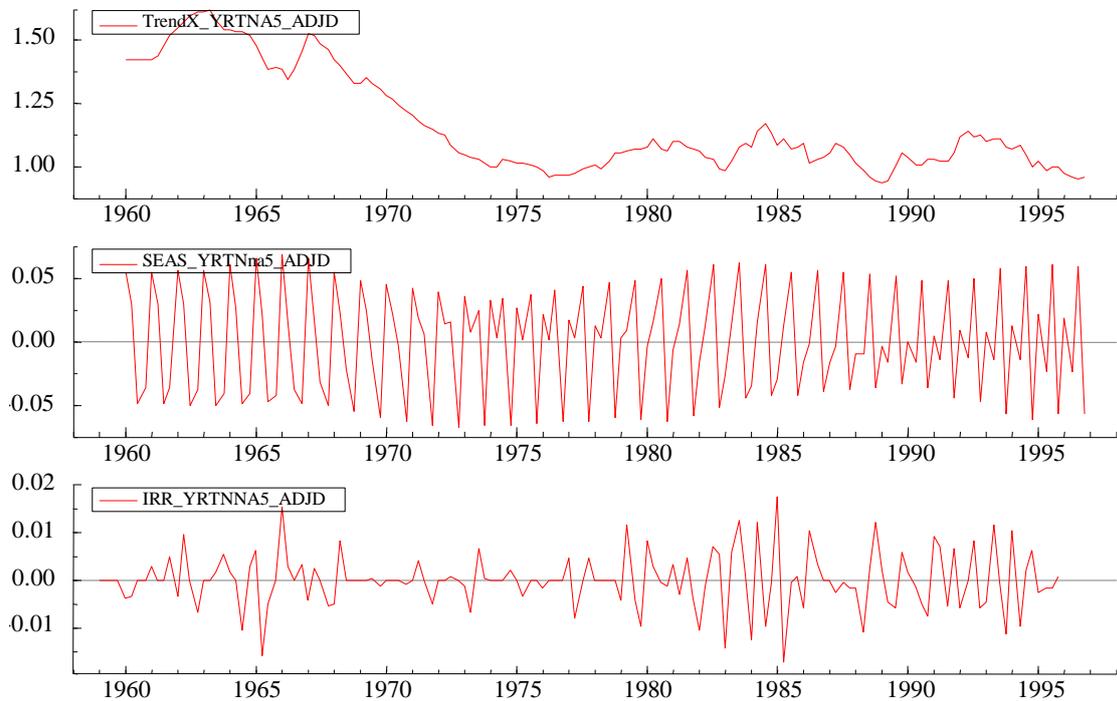
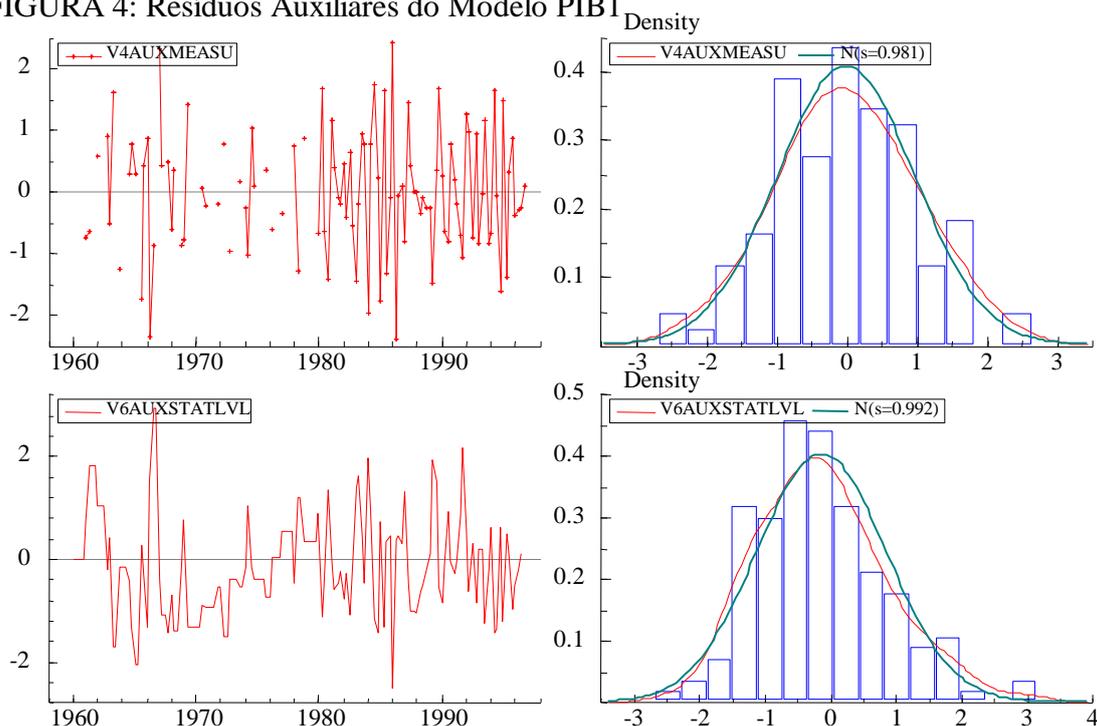


FIGURA 4: Resíduos Auxiliares do Modelo PIB1



As avaliações das previsões feitas para o período 1980 a 1996 estão reportadas na tabela 4. Esse é período para o qual estão disponíveis as estimativas oficiais do FIBGE. Apenas ressaltamos que as estatísticas são bem claras quanto à acurácia das estimativas realizadas pelo modelo PIB1. O gráfico do PIB1 – estimado pela soma dos componentes de tendência e sazonais – convertido para valores reais de 1980 aparece na figura 12.

TABELA 4: Avaliação das Predições: 1980 a 1996

Model	PIB1	PIB2	PIB3	PIB4	YQ6096
Statistics					
Root Mean Squared Error	0.0089	0.0112	0.0158	0.0245	0.0427
RMS Percentage Error	0.0069	0.0078	0.0121	0.0196	0.0372
Mean Absolute Error	0.0070	0.0073	0.0091	0.0199	0.0356
Mean Absolute Percent. Error	0.0054	0.0052	0.0066	0.0158	0.0312
Theil Inequality Coefficient	0.0034	0.0043	0.0060	0.0094	0.0185
Bias Proportion	0.0008	0.2847	0.1428	0.0021	0.0398
Variance Proportion	0.0008	0.2685	0.0947	0.0050	0.0263
Covariance Proportion	0.9984	0.4469	0.7625	0.9929	0.9339
Pseudo R2	0.9969	0.9979	0.9928	0.9770	0.9198

O modelo PIB2, que corrige os valores trimestrais do PIB de tal maneira que a soma dos trimestres seja igual ao total anual, é sob este ângulo um sucesso completo. Isto é, a soma dos PIBs trimestrais estimados iguala o PIB oficial do FIBGE. A heterocedasticidade foi inteiramente tratada. Não há presença de correlação serial nas inovações padronizadas, mas o teste K-S é rejeitado a 1%⁴⁸.

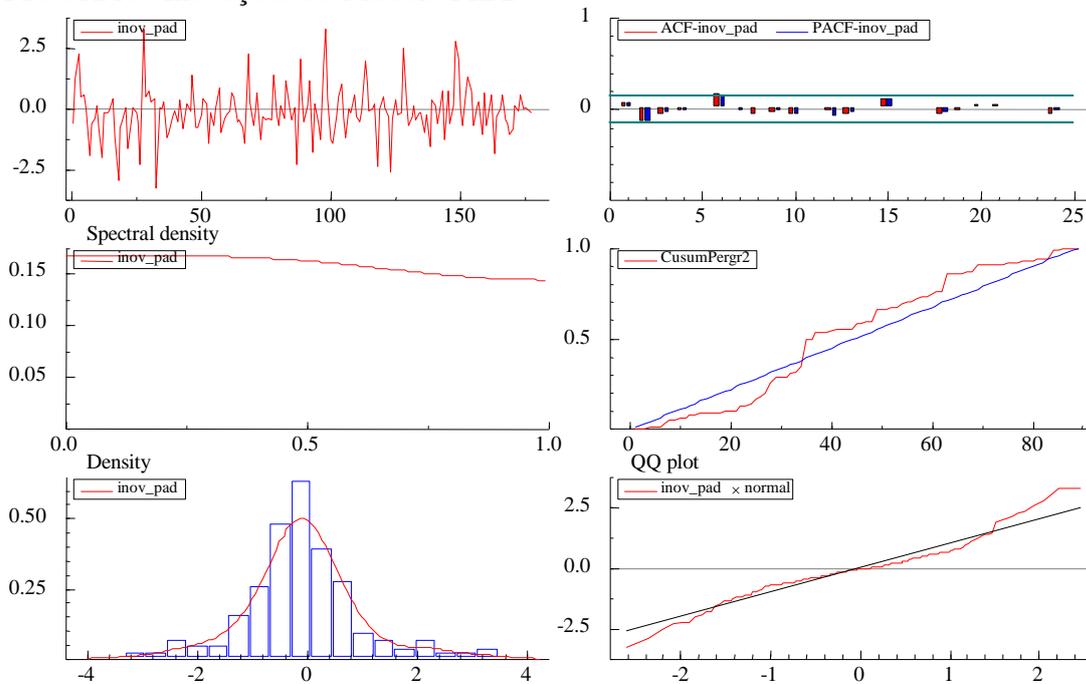
⁴⁸ Note-se que para esse modelo a PEV não é reportada, assim como as demais estatísticas obtidas a partir dela. Isto se deve ao fato, que a matriz P_t de covariância dos estados não converge para uma matriz fixa P , porque as matrizes do sistema mudam de quatro em quatro observações.

Entretanto a normalidade das inovações é rejeitada, o que não chega a ser um problema, dado não pretendermos fazer inferência estatística sobre parâmetros, mas sim extrair componentes estruturais. Contudo, é uma indicação de que o comportamento dos valores observados não está sendo representado apropriadamente pelo modelo em consideração.

Observemos que, em primeiro lugar, experimentos com o modelo com estrutura de *benchmarking*, rodado em ambiente de modelo estrutural com a especificação incluindo variáveis explicativas, indicaram a necessidade de intervenções. Em segundo, o erro de medida estimado possui um coeficiente de correlação serial de primeira ordem muito próximo de um ($\rho \approx 0.9727$)⁴⁹, o que significa que este termo absorveu ou refletiu a correlação serial que, de outra forma, estaria contida nas inovações⁵⁰. O erro de medida carrega, assim, muita estrutura que deveria estar embutida no modelo, conforme se visualiza na figura 6.

É importante ter em conta, que devido as inúmeras dificuldades computacionais para estimação desse modelo essa análise incompleta, posto que não foi possível estimar os resíduos auxiliares.

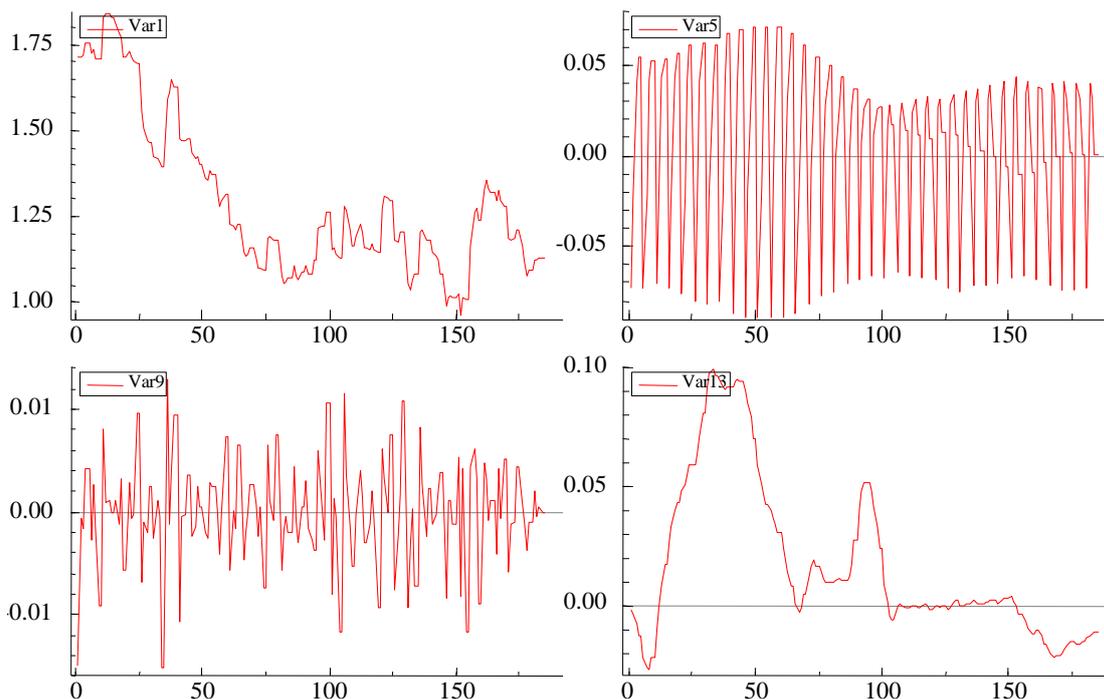
FIGURA 5: Inovações do Modelo PIB2



⁴⁹ O erro de medida estimado ξ_t sem os totais anuais tem ordem de integração próxima de um. Os testes de raiz unitária com polinômio de lags apropriadamente especificado aceitam em conjunto a hipótese nula de raiz unitária. ξ_t segue um processo ARIMA(4,1,0). A hipótese do modelo é que ξ_t é $AR(1) \sim (0,1)$.

⁵⁰ Especulamos que a estrutura do banco de dados com valores trimestrais e totais anuais em uma mesma série seja uma razão para a presença da forte persistente nos erros de medida e da falta de normalidade das inovações padronizadas.

FIGURA 6: Componentes Extraídos do Modelo PIB2



Também chamamos a atenção, que há indicações de quebra de parâmetros em 1980, um ano crítico, dado que nele ocorre o encadeamento da série estimada para dar o *start up* do processo e a série publicada pelo FIBGE. Como se observa pela componente de sazonalidade, a partir da observação cem (~1980) ela muda de comportamento⁵¹.

Se essa for uma característica da série – não observada –, podemos concluir que o modelo estimado capturou adequadamente os seus componentes estruturais, o que provavelmente decorreu de a sazonalidade ter sido especificada estocasticamente. Em caso contrario, esta mudança de comportamento do termo sazonal pode ser uma implicação da coexistência de duas metodologias de cálculo do PIB trimestral, a nossa e a do FIBGE. Fato este capturado pelo modelo de benchmarking, mas não pelos outros modelos de *state space* estimados. Como advertimos esse modelo apresentou dificuldades computacionais importantes e está aparentemente mal especificado.

Todas as observações feitas para o modelo PIB2 se aplicam ao modelo PIB3 estimado, que contém alguns valores omissos (ver seção 3.3). As inovações e os componentes extraídos do modelo PIB3 aparecem nas figuras 7 e 8.

As avaliações das previsões feitas para o período 1980 a 1996 estão reportadas na tabela 4. Esse é período para o qual estão disponíveis as estimativas oficiais do FIBGE.

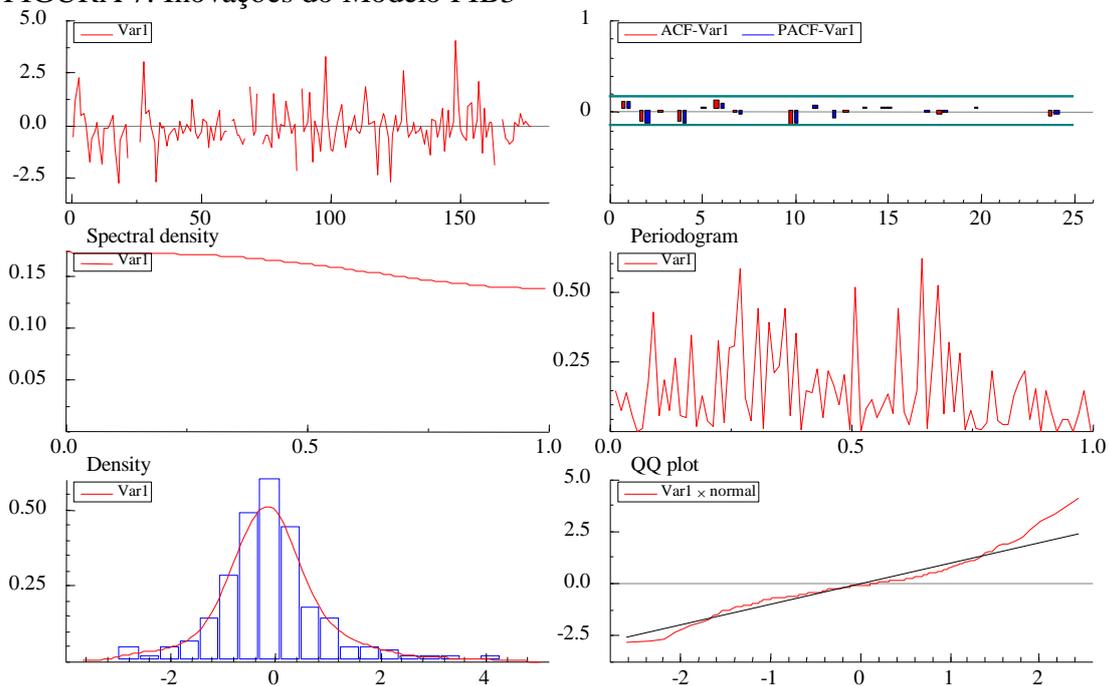
Apesar da elegância dos modelos, seus resultados e conclusões obtidos até aqui devem ser tomados com cautela. Em especial, destacamos três resultados. O primeiro – não reportado nessa versão do artigo –, é que o modelo PIB2 estimado sem tratamento de heterocedasticidade produz praticamente a mesma série, não havendo diferença material entre elas. Assim para esse modelo de *space state* – benchmarking – o filtro de

⁵¹ A afirmativa é corroborada pela análise dos coeficientes estimados por mínimos quadrados recursivos. O comportamento do coeficiente da dummy referente ao segundo trimestre passa a descrever uma trajetória ascendente a partir de 1980. Apesar de ser bastante instável ao longo de todo o período.

Kalman é robusto à heterocedasticidade. O segundo é que a presença de *missings* por sua vez afeta as estimativas, mas não de modo expressivo.

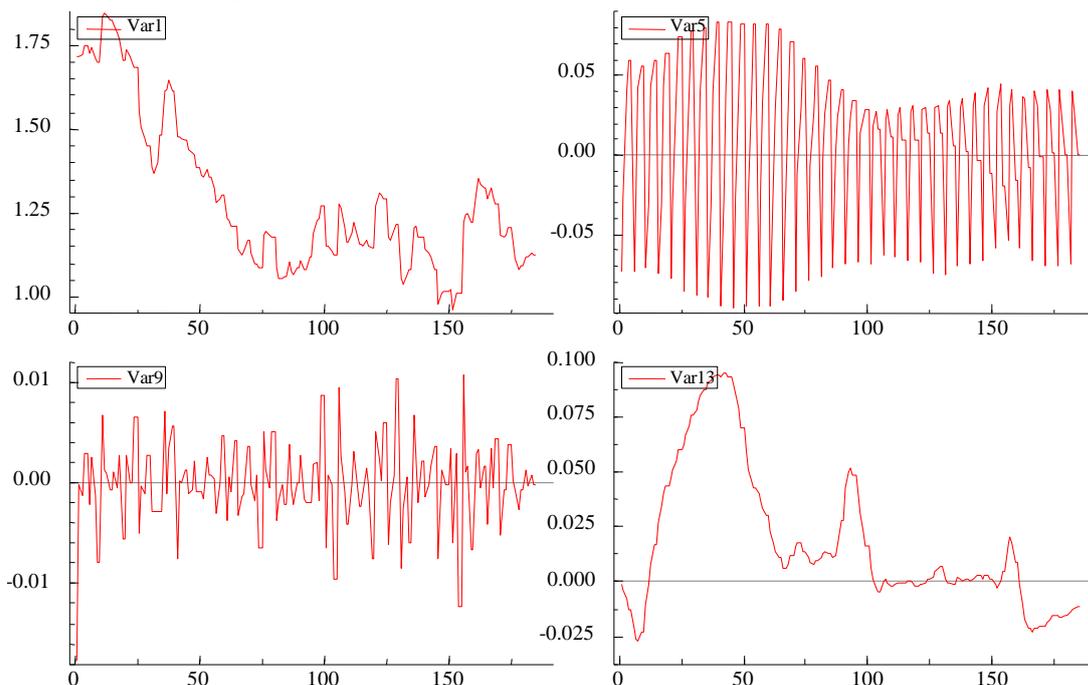
O terceiro é um resultado evidenciado pela análise da avaliação das previsões para o período 1980 a 1996 apresentada na tabela 4. O aparente viés das estimativas vem do fato de que a partir de 90.4 o PIB estimado sobreestima sistematicamente as estimativas do PIB feitas pelo FIBGE (ver figura 12). Em especial o PIB3 não acompanha os movimentos bruscos do PIB estimado pelo FIBGE ocorridos em 1991, subestimando-os⁵². O que sugere que o nosso procedimento está efetivamente corrigindo as estimativas trimestrais oficiais, de modo a que a soma dos trimestres seja consistente – igual a – com o PIB anual. Nesse caso, o viés detectado é uma característica do PIB trimestral oficial estimado e, que, portanto, são as estimativas do FIBGE que não apresentam consistência.

FIGURA 7: Inovações do Modelo PIB3



⁵² O que provavelmente explica o fato do PIB3 ter um “viés” menor que o PIB2, porque os valores se compensam, apesar das outras estatísticas de avaliação das previsões serem um pouco inferiores.

FIGURA 8: Componentes Extraídos do Modelo PIB3



O modelo multivariado associado ao PIB4 estimado envolveu, além da série do índice de PIB, os índices de produção de cimento, de veículos automotores e consumo de energia elétrica no Rio de Janeiro e São Paulo. Todas as séries foram divididas pelo índice da receita tributária real extraída de outliers. A série de produção de automóveis apropriadamente estacionarizada entrou como variável explicativa com o intuito de controlar a correlação serial.

Os testes sobre os resíduos indicam que a correlação serial foi corrigida, mas não a ponto de levar a aceitação da hipótese de que os resíduos sigam um processo do tipo ruído branco. A estatística de Kolmogorov-Smirnov rejeita essa hipótese ao nível de significância de 1% para os resíduos das equações do PIB, consumo de energia elétrica e produção de automóveis. Afora este aspecto, as inovações apresentam o padrão requerido. Nas figuras 9 a 11 estão plotados as inovações, as componentes extraídas e os resíduos auxiliares da equação do PIB⁵³.

Os resíduos auxiliares da equação de medida da série de automóveis têm a hipótese de normalidade rejeitada, assim como os resíduos do nível das equações do PIB e do consumo de energia elétrica. Os demais apresentam uma distribuição aproximadamente normal, assim como não há nos demais resíduos indicação da presença de *outliers* ou de quebras, o que indica que o modelo captura adequadamente os componentes estruturais da variável.

Os componentes extraídos aparecem na figura 10, indicam que o componente de tendência se assemelha ao do modelo PIB1. Porém, a sazonalidade apresenta um padrão mais instável e de maior amplitude, provavelmente por causa da presença de quatro variáveis dentro do modelo, fato que se reflete na oscilação do termo irregular. Desta forma, o PIB4 estimado⁵⁴ apresenta menor aderência aos dados que o PIB1.

⁵³ Os *reports* das demais equações estão disponíveis aos interessados.

⁵⁴ O PIB é estimado como a soma dos componentes estruturais a menos do termo irregular, o qual é um termo autoregressivo estável, no caso um AR(8), tal como no modelo do PIB1.

ambos sejam bem aderentes. No entanto, eles não corrigem o erro de medida das estatísticas trimestrais.

Nas figuras 12 estão plotados os quatro PIBs estimados pela metodologia de espaço de estado e o PIB estimado pela estática de Engle-Granger.

Olhados individualmente, cada um dos resultados estimados apresenta boas propriedades. E todos representam um avanço em relação às estimativas do PIB com os coeficientes da estática de Engle-Granger.

Por sua vez, as metodologias utilizando filtro de Kalman com *missing values* e com processo de *benchmarking* são por si só inovadoras na literatura brasileira, ao que se juntam os procedimentos de tratamento da heterocedasticidade e o emprego de variáveis explicativas em modelos univariados e multivariados.

O resultado mais desapontador foi o modelo de *benchmarking*, que, apesar de cumprir a tarefa de correção do erro de medida existente no trimestre, acabou gerando um erro de medida com propriedades estocásticas que colocam em questão a validade dos resultados. Julgamos esse problema superável com a mudança da especificação do modelo, e sobretudo, se forem investidos maiores esforços computacionais.

Este último fato não ofusca a elegância e simplicidade do modelo estrutural estimado com valores omissos (PIB1), nem a robustez dos resultados do modelo *SUTSE* (PIB4) com quatro variáveis dependentes e variáveis explicativas, estacionarizadas também através da metodologia de espaço de estado.

As estatísticas dos testes de diagnóstico e da avaliação da capacidade preditiva dos modelos não indicam claramente qual desses dois modelos escolher. Aparentemente, ambas as estimativas apresentam a mesma performance para serem usadas como proxy do PIB trimestral no período 1960 a 1979.

FIGURA 9: Inovações da Equação do PIB – Modelo PIB4

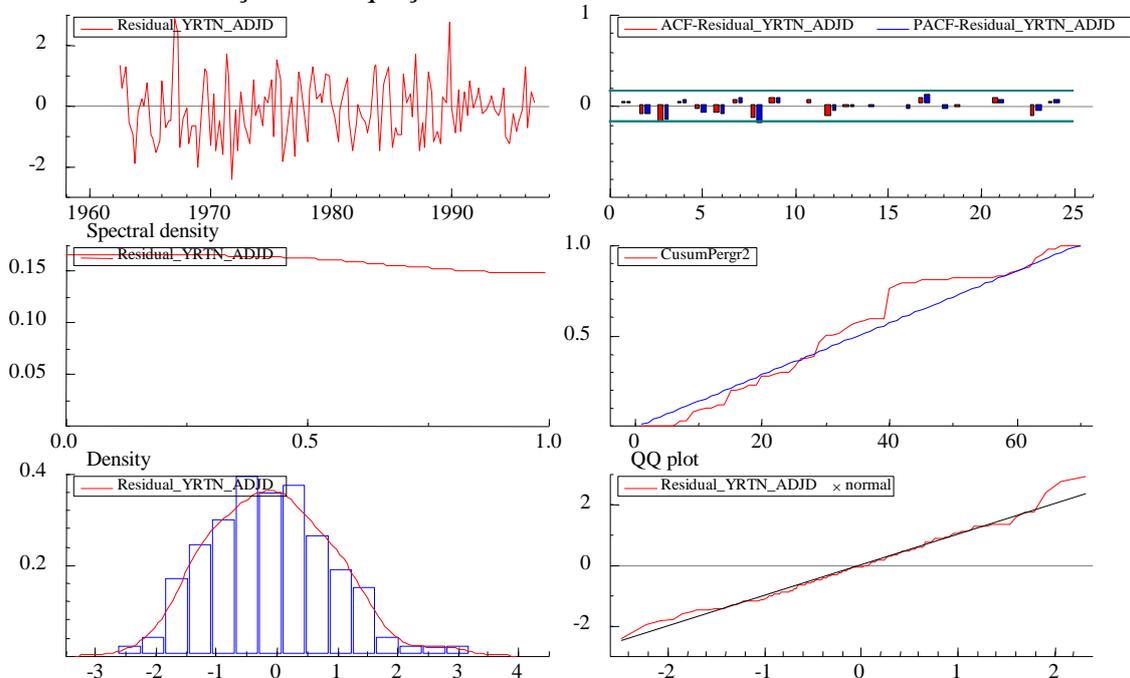


FIGURA 10: Componentes Extraídos da Equação do PIB - Modelo PIB4

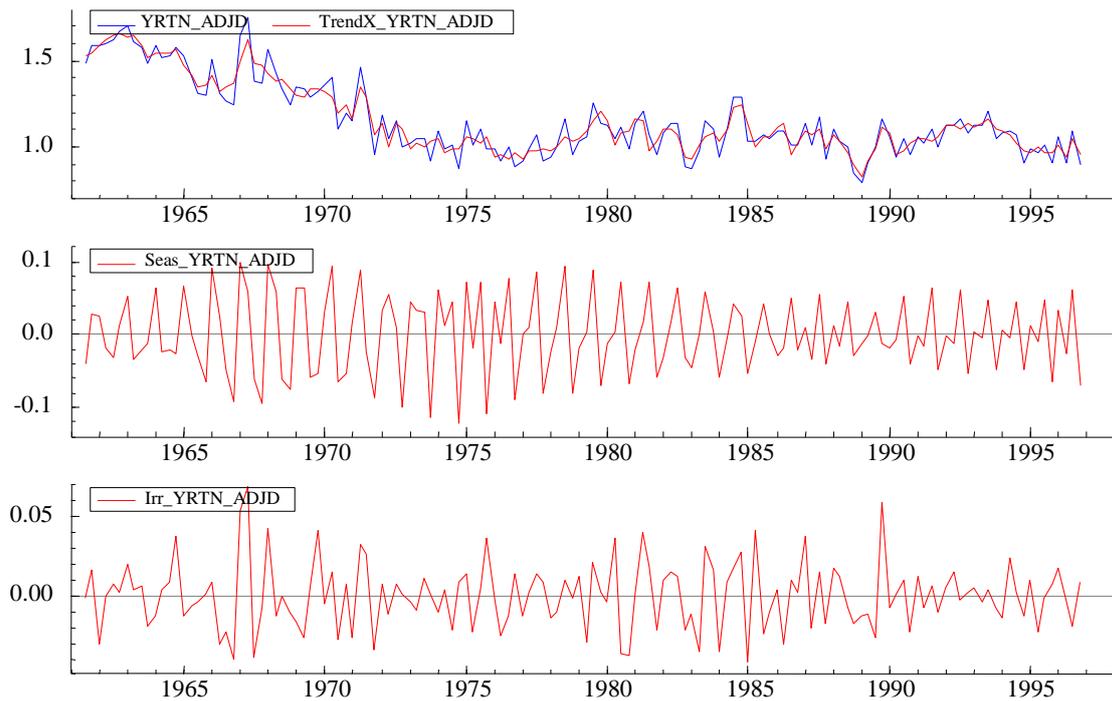


FIGURA 11: Resíduos Auxiliares da Equação do PIB.- Modelo PIB4

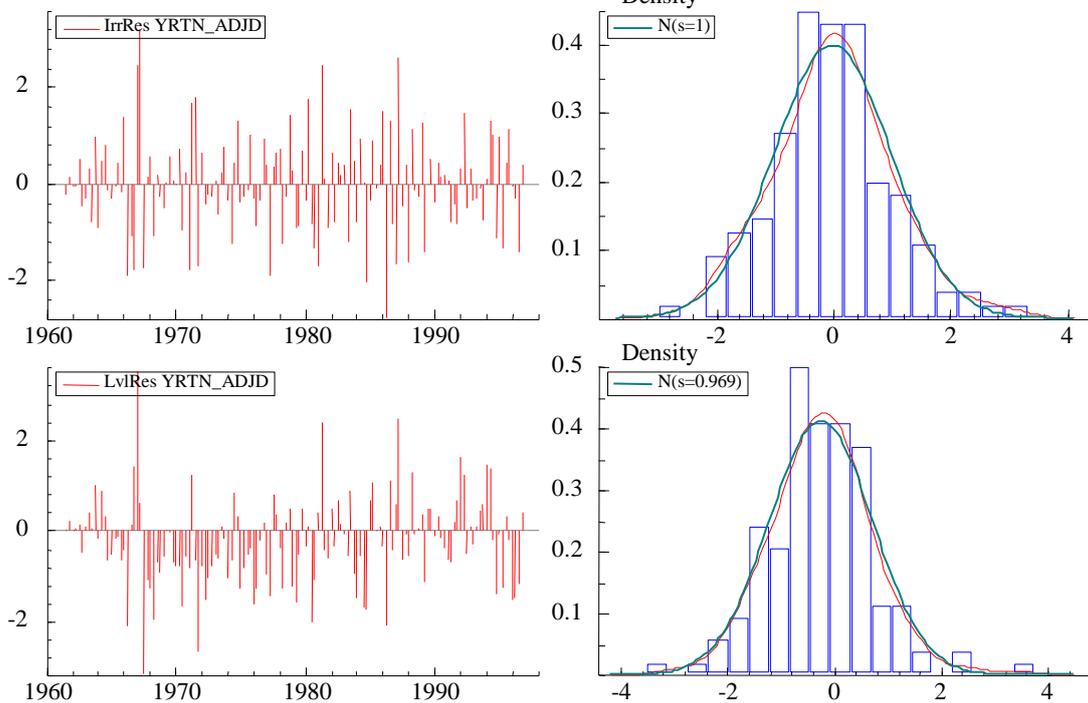
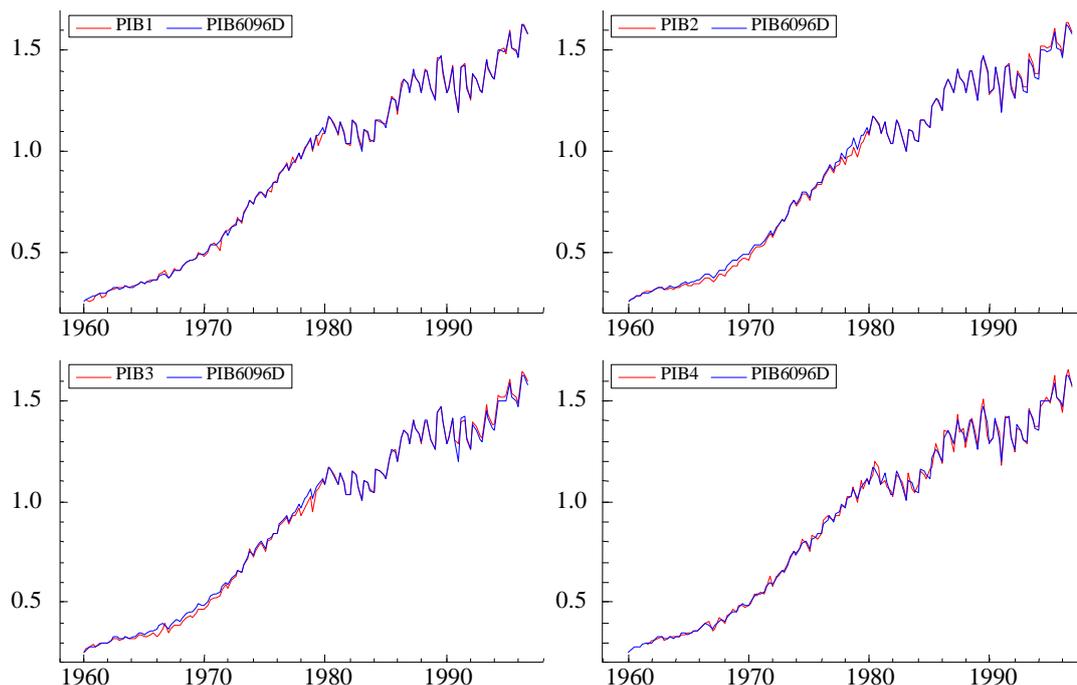


FIGURA 12: PIBs Estimados



5. Conclusão

Neste artigo estimamos o PIB trimestral para o período 1960 a 1996. Embora o objetivo inicial fosse estimá-lo apenas para o período 1960 a 1980, a necessidade de uma amostra maior nos levou a fazer estimativas para o período mais largo. A necessidade de uma proxy judiciosa para o PIB para períodos anteriores a 1980 se relaciona diretamente com a realização de estudos empíricos que cubram um período mais longo da história econômica brasileira.

Inicialmente, realizamos um experimento com um modelo simples, porém rigoroso, dado que seus estimadores são super-consistentes, que foi o de estimar os coeficientes da equação estática do teste cointegração de dois estágios de Engle-Granger realizado com frequência anual. As séries utilizadas foram o PIB, a produção de cimento, veículos automotores, consumo industrial de energia elétrica na região Rio de Janeiro e São Paulo e receita tributária do tesouro real.

O vetor de cointegração estimado é, então, aplicado sobre os dados trimestrais das séries para gerar a estimativa do PIB trimestral. Os resultados indicaram que a melhor conduta seria estender os estudos com uma metodologia mais robusta, o que nos conduziu a estimar modelos que utilizam métodos de estado de espaço.

Continuamos a pesquisa com diferentes modelos estruturais, dadas as estimativas realizadas com o modelo acima. Estimamos um modelo univariado com *missing values* no período 1960 a 1979, utilizando variáveis explicativas. Um modelo com processo de *benchmarking* que corrigisse o erro de medida dos valores dos trimestres, isto é, de modo que a soma dos PIBs trimestrais totalizasse o PIB anual respectivo. Realizamos também um experimento com modelo de *benchmarking* e valores omissos. E finalmente estimamos um modelo estrutural multivariado a quatro séries e com variáveis explicativas.

Todos os modelos foram estimados com correção de heterocedasticidade.

Estimamos, portanto, quatro modelos concorrentes e quatro séries de PIB trimestral. À exceção do modelo de *benchmarking*, todos os PIBs estimados não

incluem a componente irregular. A lógica do *benchmarking* considera a componente irregular porque o componente de erro de medida é que é retirado da sua composição.

Fizemos também uma revisão teórica sobre modelos de espaço de estado objetivando expor o suporte teórico por detrás dos modelos estimados. Deu-se ênfase especial aos modelos que lidam com *missing values*, *benchmarking* e equações com correlação contemporânea (*SUTSE*). No apêndice B, foi descrito o modelo de nível local com o intuito de apresentar de forma clara e simplificada todos os passos da metodologia de filtro de Kalman, incluindo a inicialização e estimação de parâmetros.

Os resultados foram bastante satisfatórios no que concerne aos diagnósticos dos resíduos, os quais respeitam as hipóteses do modelo Gaussiano linear. Da mesma forma, os PIBs estimados apresentam boa aderência aos dados e previram adequadamente o PIB oficial no período pós-1980. O PIB estimado com *benchmarking* por sua vez corrige os erros de medida, embora estas estimativas devam ser vistas com muita cautela, pois o erro de medida estimado apresenta uma persistência que não foi resolvida no nosso estudo.

A nível global, o modelo estimado com *missing values* e o modelo *SUTSE* apresentaram as melhores performances. Em conjunto, as estatísticas reportadas não indicam claramente qual a melhor estimativa. Certamente, essas estimativas representaram uma melhora em relação ao PIB estimado com a estática de EG. A escolha para prever o PIB no período 1960 a 1979 deve ficar recair sobre uma delas.

6. Referências Bibliográficas

Ardeo, V. e Bonelli, R. (1988). “*PIB Trimestral: Metodologia e Estimativas para o Período 1980/87 (Resultados Preliminares)*”, *Boletim Conjuntural, IPEA/INPES, no. 3, abr.*

Ardeo, V. e Giambiagi, F. (1988). “*PIB Trimestral a Preços Correntes para o Período 1980/1988: Resultados Aproximados*”, *Boletim Conjuntural, IPEA/INPES no. 5, out.*

Banco Central do Brasil. “*Boletim Mensal*”, vários números.

Banco Central do Brasil. <http://bcb.gov.br/>.

Bertsekas, D.P. (1976) “*Dynamic Programming and Stochastic Control*”. New York: Academic Press.

Caporale, G. M and Pittis, N. (2002). “*Unit Root versus Other Types of Time Heterogeneity, Parameter Time Dependence and Superexogeneity*”, *Journal of Forecasting, 21, 207-223.*

Cardoso, E. (1981). “*Uma Equação para a Demanda de Moeda no Brasil*”, *Pesq. Plan. Econ., Vol.11(3), 617-655.*

Cerqueira, L.F. (1993). “*Demanda por Moeda, Regressões Espúrias e Níveis de Instabilidade Hiperinflacionários*”. Unpublished master dissertation. Departamento de Economia, Pontifícia Universidade Católica, RJ.

Contador, C.R. e Santos Filho, W.A.C. (1987). “*Produto Interno Bruto Trimestral: Bases Metodológicas e Estimativas*”, *Pesq. Plan. Econ., 17(3), 711-742.*

Durbin, J. and Koopman, S.J. (2004). “*Time Series Analysis by State Space Methods*”. Oxford : Oxford University Press.

- Durbin, J. and Queenneville, B. (1997). “Benchmarking by State Space Models”, *International Statistical Review*, 65(1), 21-48.
- Engle, R. and Granger, C. (1987). “Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing”, in Engle, R. and Granger, C.W.J. (eds.), *Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*. Oxford: Oxford Univ. Press, (1991).
- Engle, R. and Granger, C.W.J. (1991). “Introduction” to *Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*, op. cit., (1991).
- Engle, R., Granger, C.W.J, and Hallman, J. (1989). “Merging Short and Long Run Forecasts: An Application of Seasonal Cointegration to Monthly Electricity Sales Forecasting”, in Engle and Granger op. cit.
- Elliot, G., Rothenberg, T.J.and Stock, J.H. (1996). “Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root”, *Econometrica*, 64, 813-836.
- Estima, (2004). “Rats 6.1: User’s Guide”. Evanston: Estima.
- FGV, “Conjuntura Econômica”, vários números.
- FIBGE, “Anuário Estatístico do Brasil”, vários números. .
- FIGBE. “Sistema IBGE de Recuperação Automática-SIDRA”, <http://www.sidra.ibge.gov.br/>.
- Granger, C.M.J. and Newbold, P. (1986). “Forecasting Economic Time Series”, 2nd edition. London: Academic Press.
- Harvey, A.C. (1990a). “The Econometric Analysis of Time Series”, 2nd Edition. New York: Philip Allan.
- Harvey, A.C. (1990b). “Forecasting, Structural Time Series and the Kalman Filter”. Cambridge: Cambridge University Press.
- Harvey, A.C and Koopman, S.J. (1992). “Diagnostic Checking of Unobserved Time Series Models”, *J. Business and Economic Statistics*, 10, 377-389.
- Harvey, A.C and Koopman, S.J. (1997). “Multivariate Structural Time Series Models, In Heji, C., Schumacher, H., Hanzon, B. and Praagman, C. (eds.) *Systematic Dynamics in Economics and Financial Models*, pp. 269-298. Chichester: John Wiley and Sons.
- Harvey, A.C and Koopman, S.J. (2000). “Signal Extraction and the Formulation of Unobserved Components Models”, *Econometrics Journal*, 3, 84-107.
- Hylleberg, S., Engle, R.F., Granger, C.W.J. and Yoo, B.S. (1990). “Seasonal Integration and Cointegration”, *Journal of Econometrics*, 44, 215-238.
- IPEA. “Ipeadata”, <http://www.ipeadata.gov.br/>.
- Johansen, S. (1995). “Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Auto-Regressive Models”. New York: Oxford University Press.
- Johnston, J. and Dinardo, J. (1997). “Econometric Methods”, 4th edition. New York: The McGraw Hill Co.

Koopman, S. J. and Shephard, H. (1992). “Exact Score for Time Series Models in State Space Form”, *Biometrika*, 79, 823-26.

Koopman, S. J., Shephard, H. and Doornik, J.A. (1999). “Statistical Algorithms for Models in State Space Using SsfPack 2.2”, *Econometrics Journal*, 2, 107-160.

Koopman, S.J., Harvey, A.C., Doornik, J.A. and Shephard, N. (2000). “Stamp 6.3: Structural Time Series Analyzer, Modeller, and Predictor”. London: Timberlake Consultants.

MacKinnon, J. (1991). “Critical Values for Cointegration Tests”, In Engle and Granger op. cit.

Maddala, G.S. and Kim, In-Moo (2002). “Unit Roots, Cointegration, and Structural Changes”. Cambridge: Cambridge University Press.

Pastore, A.C. (1991). “Déficit, Dívida Pública, Moeda e Inflação: Uma Resenha”. Unpublished.

Perron, P. and Ng, S. (1997). “Useful Modifications to Some Unit Root Tests with Dependent Errors and Their Local Asymptotic Properties”, *Review of Economic Studies*, 63, 435-465.

Pinotti, M.C. (1991). “Inovações Financeiras e Imposto Inflacionário”. Tese de Doutorado, FEA, USP, SP.

QMS (2004). “Eviews 5”. Irvine, CA: Quantitative Micro Software, LLC.

Rossi, J.M. (1988). “A Demanda de Moeda no Brasil: O Que Ocorreu a Partir de 1980?”, *PPE*, Vol. 18(1), 37-53.

Apêndice A: Informações sobre a Obtenção e Tratamento dos Dados Utilizados

A.1 Descrição sobre o levantamento dos dados

Neste apêndice são descritos os dados utilizados no artigo. Todas as séries foram objeto de análise de consistência e, quando apareceram em mais de uma fonte foram comparadas de tal maneira a identificar e corrigir erros de digitação e/ou cálculo e preservar a maior precisão possível.

Basicamente, este cotejo foi feito entre as séries divulgadas nos sites do Banco Central, FIBGE, IPEADATA, Conjuntura Econômica e com o nosso próprio banco de dados formado ao longo dos anos.

Como regra, considerou-se como dado a ser utilizado aquele divulgado pela última vez em alguma publicação oficial. Neste caso, salvo revisões extraordinárias, o dado pode ser considerado definitivo.

As séries são apresentadas com frequência anual e trimestral.

A.1.1 PIB

O índice do produto real anual base 1980 foi coletado no IPEADATA – que se assemelha à série apresentada no site do Banco Central – e cobre o período de tempo desde 1947.

A série de PIB em valores correntes aparece no site do FIBGE em milhares de cruzados até 1989 e, a partir daí, em milhares de reais. Portanto, para o período de 1989 para trás, a série foi convertida para cruzeiros reais e depois para reais e está expressa em milhões de reais. Esta série está mais precisa e correta do que aquela divulgada no IPEADATA. A série de PIB em valores constantes (reais) de 1980 foi obtida também no IPEADATA.

A série do índice de PIB trimestral metodologia antiga base 1980 foi obtida no site do IPEA. A série deixou de ser calculada após o terceiro trimestre de 1997. Entretanto, a série com metodologia nova base 1990 só é computada para os trimestres de 1991 em diante. Existem, então, problemas com o procedimento de encadeamento. A opção mais simples é usar apenas a série antiga, tomando como base o ano de 1980 e truncando o período em 1996 – para não ter de trabalhar com fração de ano.

A série do PIB trimestral em valores constantes de 1980 é calculada obedecendo à seguinte fórmula:

$$\text{PIBREAL}_{j,i} = (\text{PIBR}_{80}/4) (\text{YQ}_{j,i}/100), \quad (\text{A1})$$

onde $\text{PIBREAL}_{j,i}$ = PIB real a preços de 1980, trimestre j , ano i ; PIBR_{80} = PIB real de 1980; $\text{YQ}_{j,i}$ = índice de PIB trimestral, 1980=100.

A.1.2. Séries intervenientes no PIB

As séries foram levantadas com frequência mensal. E agregadas para se obterem dados com frequência trimestral e anual. Para os meses cujos dados não estavam disponíveis, um procedimento de estimação foi desenvolvido tal como descrito abaixo.

A série de produção de veículos automotores (automóveis, caminhões, utilitários e CKDs) foi obtida na Conjuntura Econômica, abril de 1977, e números posteriores da Fundação Getúlio Vargas, para o período 1966 a 1976. Neste número da revista, apresentou-se uma seção especial com diversas séries históricas. Para trás de 1966, os dados foram obtidos com a ANFAVEA e, para depois de 1980, no IPEADATA.

A produção de cimento (milhares de toneladas) foi obtida nas mesmas Conjunturas acima e completada com dados do IPEADATA.

O consumo industrial de energia (milhares de MWh) da região Rio de Janeiro e São Paulo foi levantado nas Conjunturas mencionadas até agosto de 1984. A partir dessa data, a série deixa de ser publicada, e as estatísticas agora divulgadas pela Eletrobrás passam a apresentar apenas o consumo industrial agregado da região Sudeste. As tentativas de obter os dados junto à Light, Eletropaulo e Eletrobrás não foram exitosas.

A série foi projetada para o período posterior a agosto de 1984 com a taxa de crescimento do consumo industrial da região Sudeste. Esta última série foi obtida no site do Banco Central. Note-se que o procedimento de interpolação, além de simples é intuitivo, dado que o eixo Rio-São Paulo é o principal centro industrial da região.

A produção de petróleo e LGN a partir de 1965 foi obtida na Conjuntura Econômica de 1977, estendida com números posteriores até 1979; após esse ano, os dados foram coletados no IPEADATA, sendo os mesmos apresentados no site do Banco Central. Os dados anteriores a 1979 foram convertidos para barris diários pela relação m^3/BBL . Para o período anterior a 1975, os dados não estão disponíveis com frequência mensal, mas existem para o ano, conforme informações obtidas com a Petrobrás e ANP.

O procedimento de cobrir a falta de dados foi interpolar a série de ano para trimestre, utilizando a metodologia descrita no próximo item desse apêndice.

Um processo semelhante ocorreu com a produção de aço em lingotes (mil toneladas), com a diferença de que os contatos se deram com o IBS e a CSN e a interpolação foi feita para o período anterior a 1971.

A série de receita do Tesouro Nacional em valores nominais do período 1965 a 1979 foi obtida na Conjuntura Econômica tal como as demais séries. Para os anos posteriores, os dados foram obtidos no Boletim e no site do BCB. Os dados foram convertidos para reais e, em muitos períodos, corrigidos usando a fonte que apresentasse o dado mais novo e depois convertidos para valores reais utilizando o IGP-DI da FGV base 1980. Para os anos anteriores a 1965, os dados não estão disponíveis com frequência mensal, apenas para o ano, conforme informado pela Secretaria da Receita Federal. Os dados foram interpolados de ano para trimestre.

É interessante notar que, no que concerne ao aspecto erro de mensuração, as séries de produção de veículos e de cimento são as que, em tese, devem apresentar o menor ou nenhum erro de medida, posto que provém integralmente das fontes primárias, enquanto as demais séries passaram algum tipo de recuperação de dados omissos. Portanto, tem mais sentido escolher uma das duas como variáveis explicativas ou “exógenas”.

A.2 Metodologia de Interpolação das Séries

A.2.1 Informações Técnicas

Nesta subseção apresentamos uma breve incursão sobre o método de interpolação utilizado nesta seção do artigo.

O procedimento envolve a solução de um problema de programação dinâmica. Suponha X_t , $t = 1, \dots, T$ seja a série observada e x_t , $t = 1, \dots, kT$ é a série não observada com frequência mais alta, onde k é a razão entre as duas frequências. Assuma que a série de frequência mais alta seja gerada pelo seguinte processo subjacente:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + u_t. \quad (A2)$$

Os respectivos valores de α_1 e α_2 para os vários modelos são os seguintes:

- 1.0 e 0.0 para um processo I(1) sem termo AR
- 0.9 e 0.0 para um processo I(0) e AR(1)
- 1.9 e -0.9 para um processo I(1) e AR(1)
- 2.0 e -1.0 para um processo I(2) sem termo AR

O objetivo é minimizar $\sum_{t=1}^{kT} u_t^2$ sujeito a restrição $X_t = x_{k(t-1)+1} + \dots + x_{kT}$.

Este problema pode ser colocado na forma de um problema de controle ótimo:

$$\text{Argmin}\{u_t\} \quad U_t R_t U_t' \text{ sujeito a } X_t = AX_{t-1} + BU_t + w_t; \quad c_t X_t = 0,$$

onde R é identidade, $U_t = (u_{k(t-1)+1}, \dots, u_{kt})$, $c_t = (1, 1, 1, \dots, -y_t)$.

Este problema quadrático-linear de controle ótimo é resolvido recursivamente (ver Bertsekas, 1976). Suponha que o último vetor de estado indo para o período T é X_{T-1} . Assim, o custo remanescente a ser incorrido é

$$E(X_T' Q_T X_T + U_T' R_T U_T), \quad (A3)$$

onde Q_t é a matriz de covariância dos w_t .

Substituindo $X_T = A_T X_{T-1} + B_T U_T + w_T$ e tomando expectativas, desde que w_T tenham esperança condicional zero sobre os choques passados do sistema, todos os termos envolvendo os choques de estado w desaparecem, exceto $E(w_T' Q_T w_T)$. Porém

este termo não interage com U_T e assim pode ser ignorado no processo de otimização. A solução por backward induction pode ser feita como se não existisse nenhum choque na equação de transição.

A solução para minimizar o custo remanescente dado X_{T-1} é

$$U_T = \{-(B_T' Q_T B_T + R_T)^{-1} B_T' Q_T A_T\} X_{T-1}. \quad (A4)$$

Com U_T calculado como uma função linear de X_{T-1} , os termos do custo (A3) do tempo T podem ser escritos como uma forma quadrática em X_{T-1} . O problema em $T - 1$ pode ser resolvido usando o mesmo método, produzindo U_{T-1} como uma função linear de X_{T-2} . As leis de determinação dos controles são geradas recursivamente até o início da amostra.

Neste ponto obteve-se um funcional do tipo *cost-to-go*, que fornece o custo total como uma forma quadrática em X_0 , a saber $X_0' Q_0 X_0$. O filtro de Kalman é então aplicado para gerar os vetores de estado suavizados. A equação de transição do filtro de Kalman é dada por

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_t D_t X_{t-1} + w_t, \quad (A5)$$

onde D_t são as matrizes nas soluções dos controles $U_t = D_t X_{t-1}$. Tal como indicado, as matrizes D_t são calculadas recursivamente para trás, começando em T ; então se calcula X_1 resolvendo o problema de otimização quadrática, e se resolvem para frente os U 's e X 's.

A.2.2 Procedimentos de Interpolação

Para as séries que possuem apenas frequência anual para parte do período – produção de petróleo, aço e receita tributária nacional em valores correntes, construiu-se um teste ADF de raiz unitária para um período “específico”. Com a especificação do teste, deduz-se o processo ARIMA da série, i.e., um *random walk* puro, um *random walk* com um processo autorregressivo de ordem 1 com o coeficiente de autorregressão associado, ou um processo integrado de segunda ordem. Com essas informações, realiza-se a interpolação da forma descrita na seção anterior e encadeia-se a série interpolada com a série trimestral observada a partir do período em que os dados não estão disponíveis.

Para a série de produção de petróleo, escolheu-se interpolar no período 1955 a 1969, em função da homogeneidade do crescimento nesse período, que ainda não era muito pronunciado. A maior parte dos testes indicou a série como sendo I(2), o que nos levou à escolha desta especificação (ver figura 6 abaixo).

A interpolação da produção de aço foi feita para o período 1961 a 1997 a partir da constatação de que ela segue um processo do tipo *random walk* puro.

A série de receita tributária nacional foi interpolada no período 1952 a 1973, supondo que a série no período era I(2). A série foi convertida para reais e encadeada com a série observada em 1965.3.

A.3 Descrição dos Dados

Nas figuras A1 a A7 apresentam-se os dados propriamente ditos. Em cada figura a série é plotada em níveis e, para as suas primeiras diferenças, apresentam-se as funções de autocorrelação e a função de densidade espectral. O comprimento do correlograma e o tamanho da janela foram fixados em 12. Nas sete primeiras figuras os dados são anuais.

FIGURA A1: Índice do PIB Anual

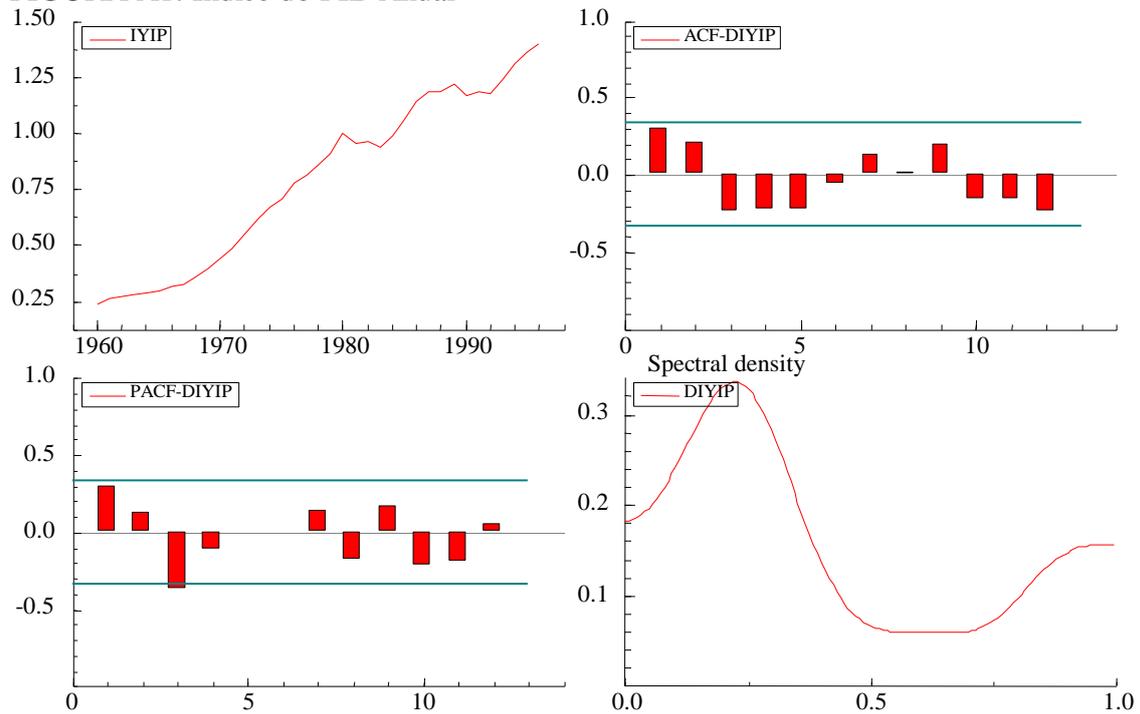


FIGURA A2: Índice da Produção Anual de Veículos Automotores

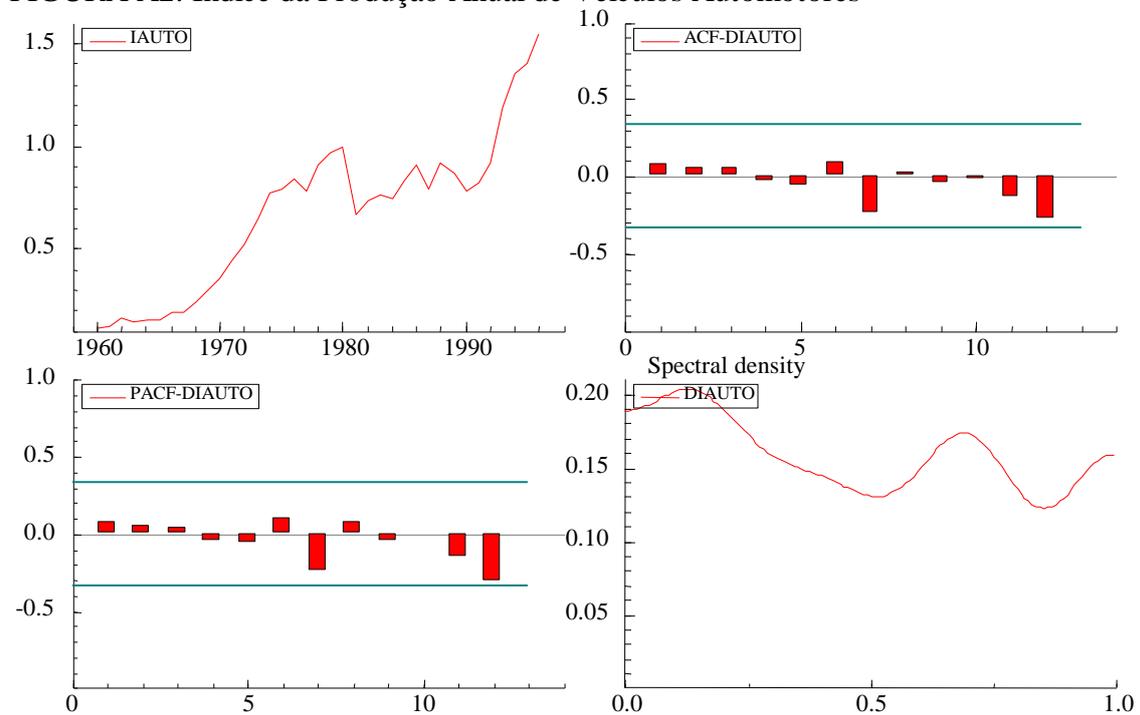


FIGURA A3: Índice da Produção Anual de Cimento

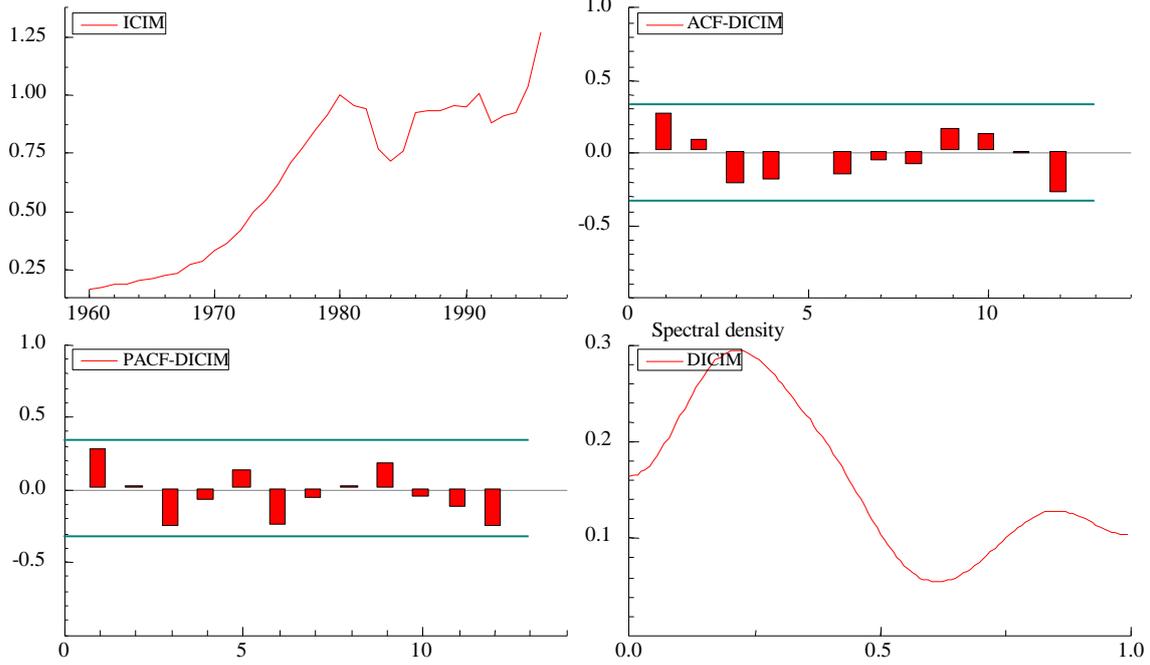


FIGURA A4: Índice do Consumo Industrial de Energia Elétrica

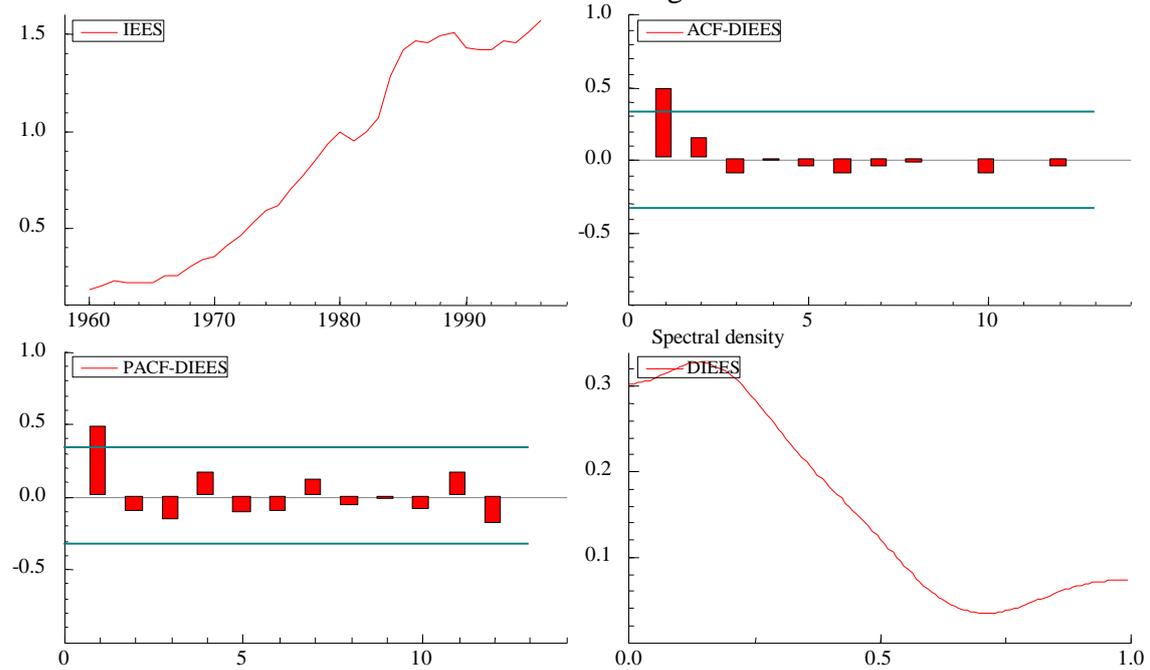


FIGURA A5: Índice da Arrecadação Tributária Real

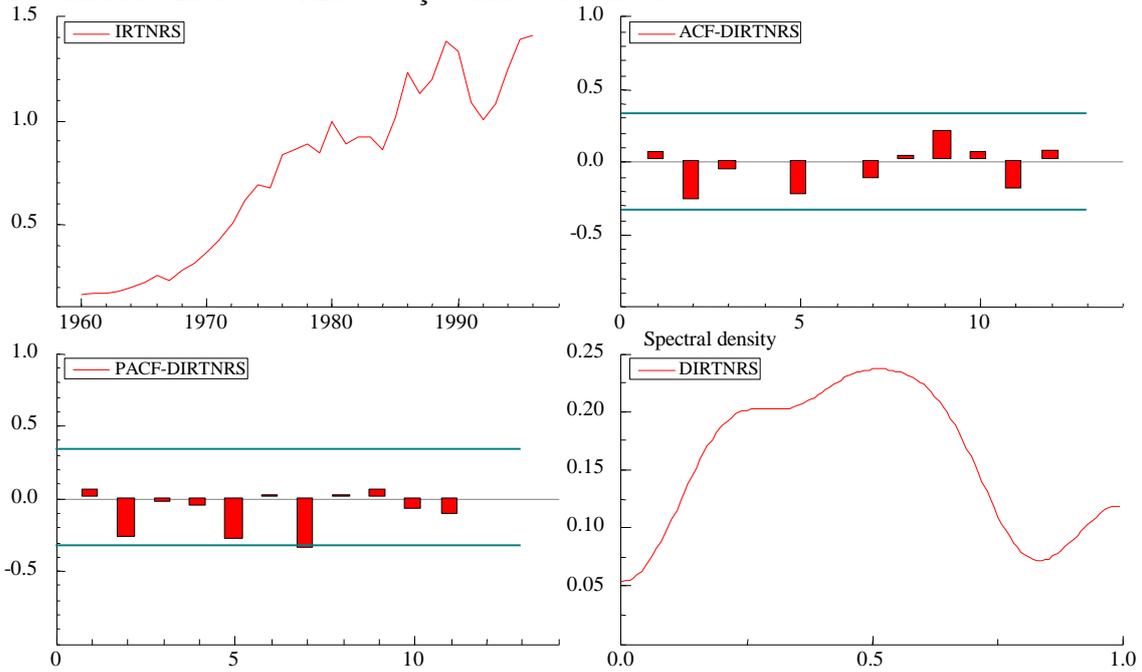


FIGURA A6: Índice da Produção Anual de Petróleo e LGN

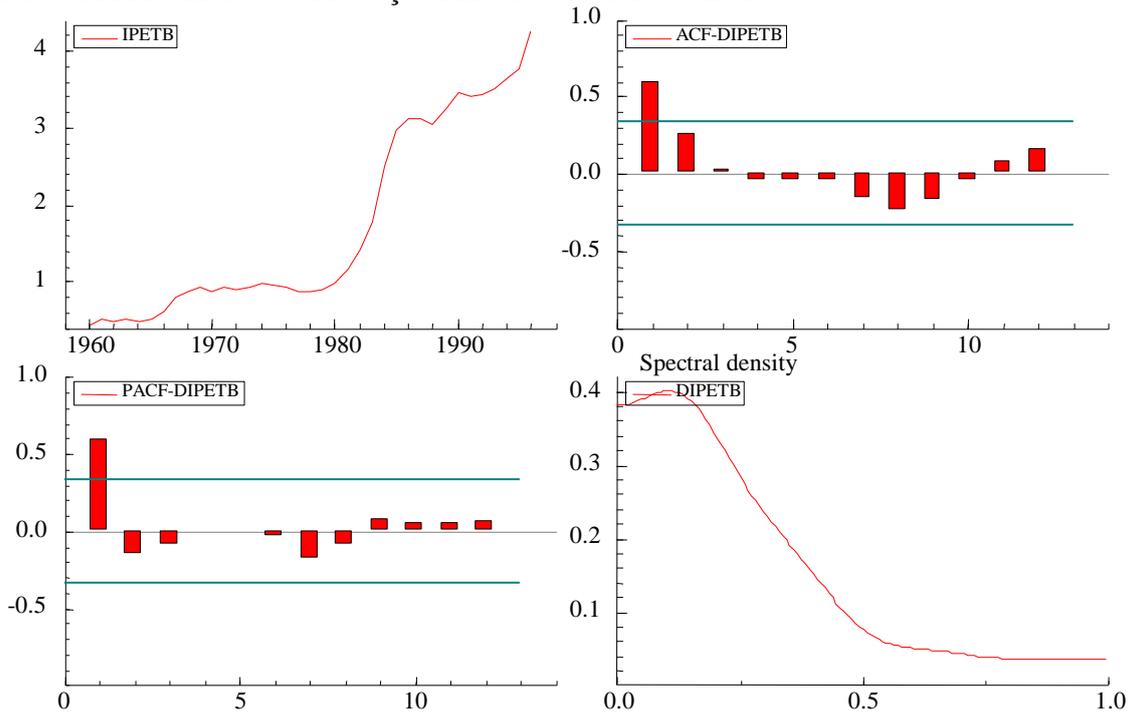
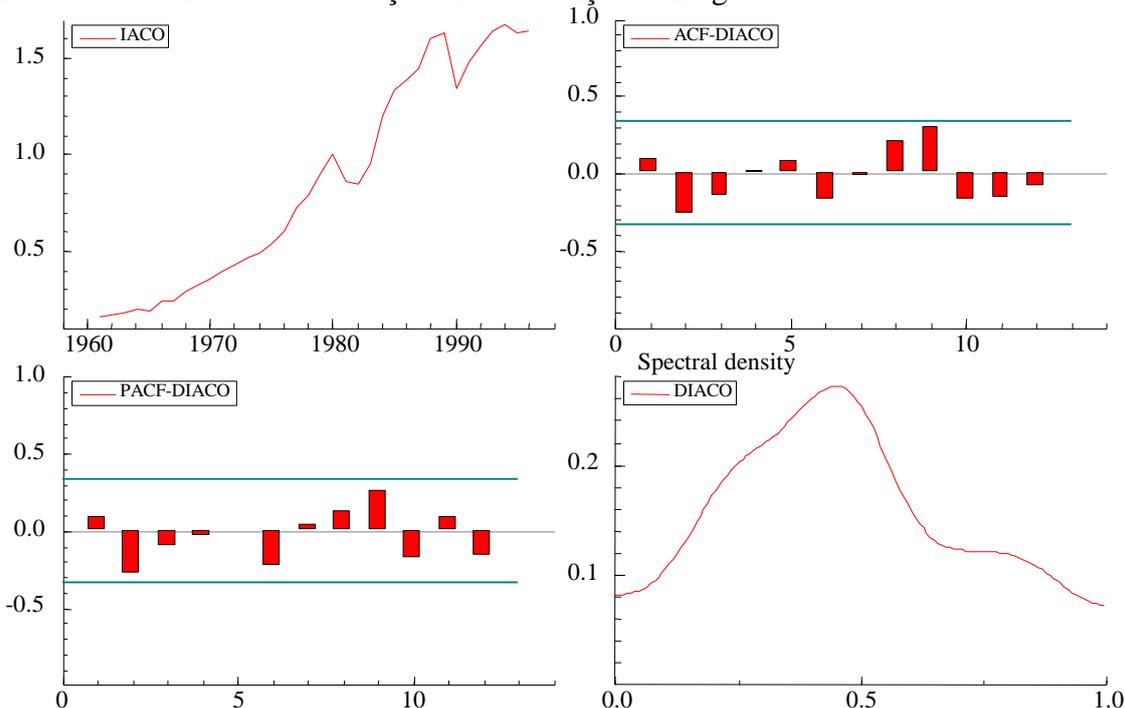


FIGURA A7: Índice da Produção Anual de Aço em Lingotes



Na tabela A1 são reportados os resultados dos testes de raiz unitária das séries anuais em primeiras diferenças no período 1960 a 1996. Os testes utilizados são modificações dos testes tradicionais de Dickey-Fuller aumentado e Phillips-Perron. A saber DF-GLS (*Dickey-Fuller test with GLS Detrending*), ERS-PO (*Elliot, Rothenberg and Stock point optimal test*), e Ng-Perron (*NG and Perron test*).

Tabela A1: Resultados dos Testes de Raiz Unitária

Teste Série	DF-GLS	ERS-PO	Ng-Perron			
			MZ_{α}^d	MZ_T^d	MSB^d	MP_T^d
PIB	$t\hat{\alpha} = -2.987$	$P_T = 1.330$	-18.128	-3.008	0.166	-1.360
	Lags=3	Lags=3	Lags=3	Lags=3	Lags=3	Lags=3
AUTO	$t\hat{\alpha} = -5.350$	$P_T = 1.458$	-18.419	-2.984	-0.162	-1.513
	Lags=0	Lags=2.79	Lags=2.79	Lags=2.79	Lags=2.79	Lags=2.79
CIM	$t\hat{\alpha} = -2.849$	$P_T = 2.738^*$	-15.950	-2.481*	-0.156	-2.739*
	Lags=3	Lags=3	Lags=3	Lags=3	Lags=3	Lags=3
EE	$t\hat{\alpha} = 3.142$	$P_T = 1.887^*$	-13.363*	-2.570	-0.192*	-1.891*
	Lags=1	Lags=1	Lags=1	Lags=1	Lags=1	Lags=1
RTNR	$t\hat{\alpha} = -5.507$	$P_T = 1.419$	-16.625	-2.883	-0.173*	-1.474
	Lags=0	Lags=2	Lags=2	Lags=2	Lags=2	Lags=2
PETB	$t\hat{\alpha} = -2.817$	$P_T = 3.342^\dagger$	-9.863*	-1.976†	-0.200*	-3.386†
	Lags=1	Lags=1	Lags=1	Lags=1	Lags=1	Lags=1
AÇO	$t\hat{\alpha} = -5.102$	$P_T = 1.470$	-16.336	-2.857	-0.175*	-1.504
	Lags=0	Lags=0	Lags=0	Lags=0	Lags=0	Lags=0

Nota: O símbolo (†) indica rejeição da hipótese nula ao nível de significância de 10%; (*) ao nível de 5%; e, na ausência de símbolos, rejeição a 1%. Em todos os casos, a hipótese nula foi rejeitada.

Os dois primeiros testes são modificações do teste ADF, e o último apresenta quatro estatísticas que são modificações das estatísticas de Phillips-Perron, Bhargava e ERS-PO (ver Elliot, Rothenberg & Stock, 1996; Ng & Perron, 1996; Maddala e Kim, 2002).

Os lags de truncamento e o tamanho da janela (bandwidth) l - que funciona como um lag de truncamento na atribuição de pesos às autocovariâncias – foram determinados a partir da inspeção das autocorrelações amostrais e com a análise da sensibilidade dos resultados às variações de l . Em certos casos, o tamanho da janela foi selecionado usando o método de Newey-West. O método de estimação escolhido foi o que usa a função kernel (janela) espectral quadrática.

Considerados os resultados dos testes realizados, todas as séries possuem ordem de integração um.

Na figura A8 aparecem os dados em índices trimestrais encadeados com as observações interpoladas ou projetadas e na figura A9 as séries do PIB estimado, YQ, as séries observadas da produção de automóveis, cimento e consumo industrial de energia elétrica divididas pela série da receita tributária real ajustada, em índices (ver texto).

Na figura A10 aparecem as séries utilizadas nas estimações com *benchmarking*. Note que as séries estão em arquivo não datado e os spikes representam os totais anuais, soma dos trimestres de cada ano. No entanto, isto não vale para o PIB. O PIB anual é o valor oficial fornecido pelo FIBGE. Os valores trimestrais são calculados a partir da equação (A1). Para os trimestres posteriores a 1980, inclusive, os valores são computados com os índices trimestrais do FIBGE, metodologia antiga. Para os trimestres anteriores a 1980, o índice é calculado conforme procedimento descrito na seção 3.1. As somas dos PIBs trimestrais não são iguais, portanto, aos totais anuais, o que vale para todo o período. O papel do modelo de *benchmarking* visa corrigir este erro de medida.

FIGURA A8: Variáveis Intervinentes no PIB - Dados Trimestrais

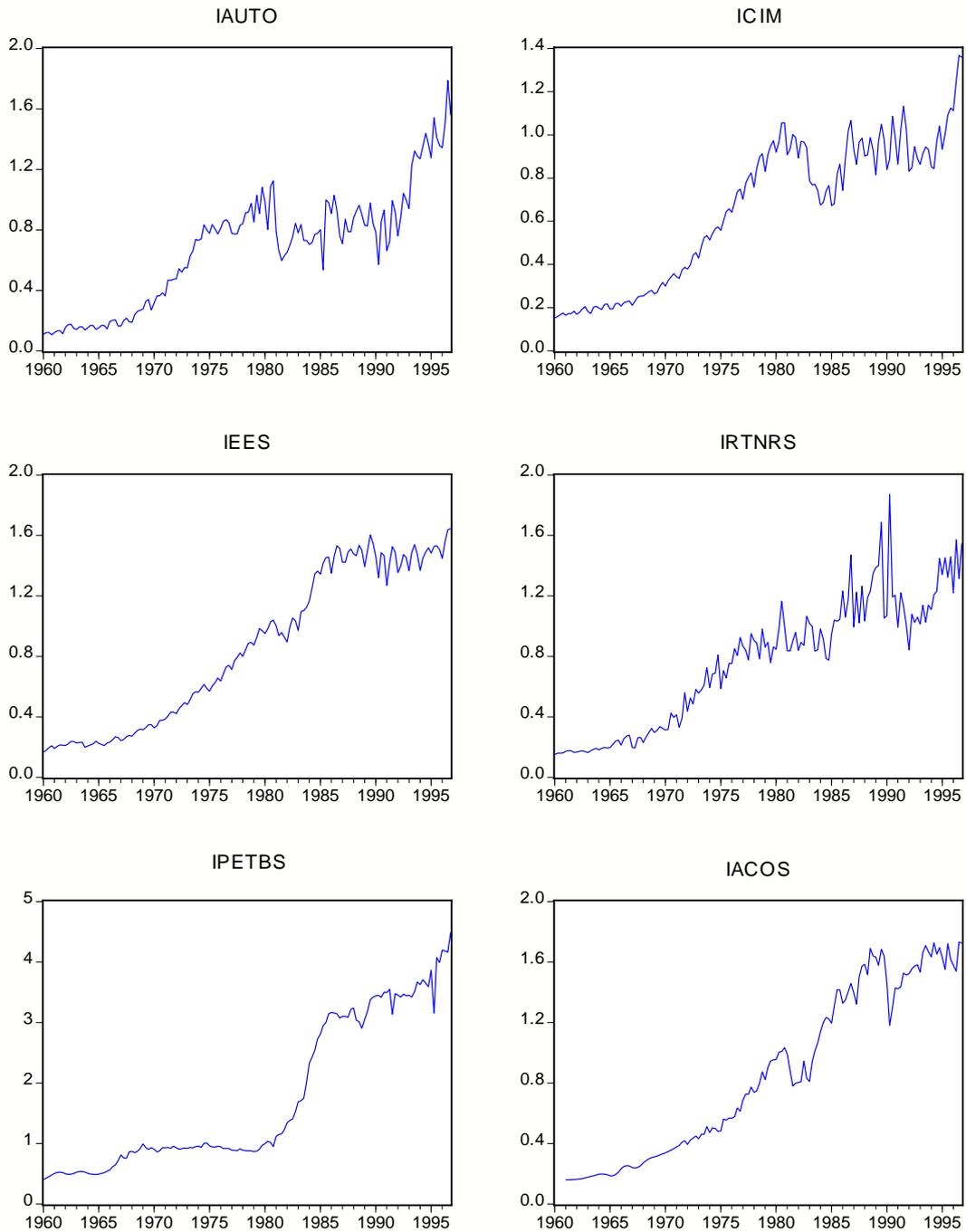


FIGURA A9: Variáveis Ajustadas – Dados Trimestrais

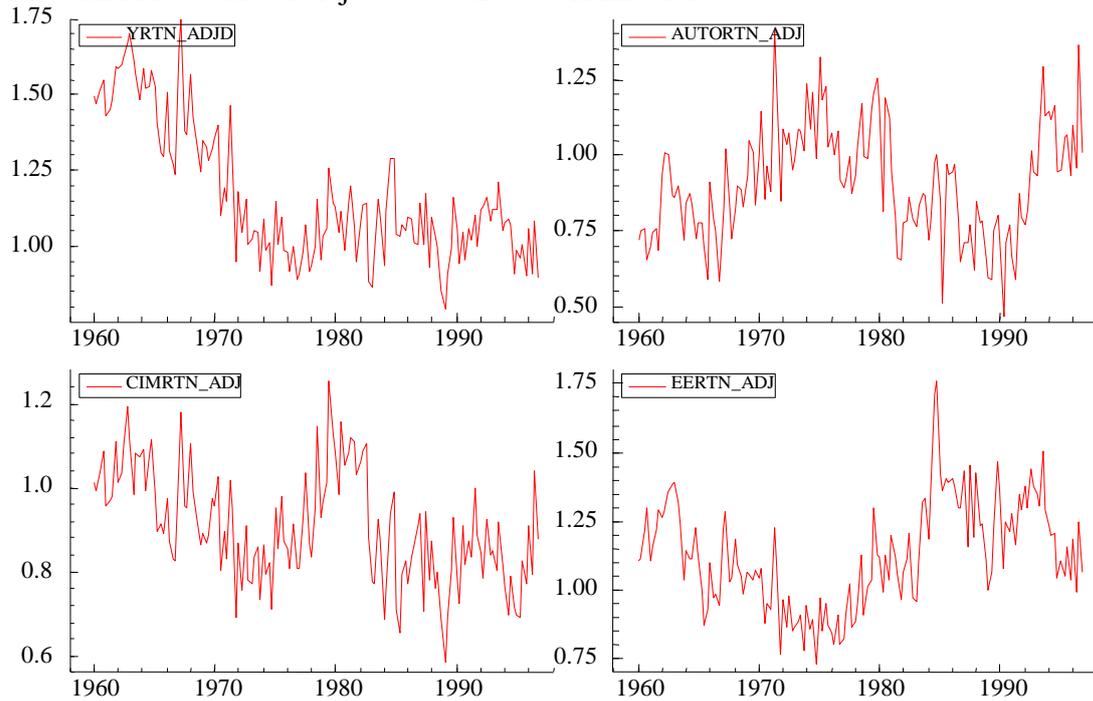
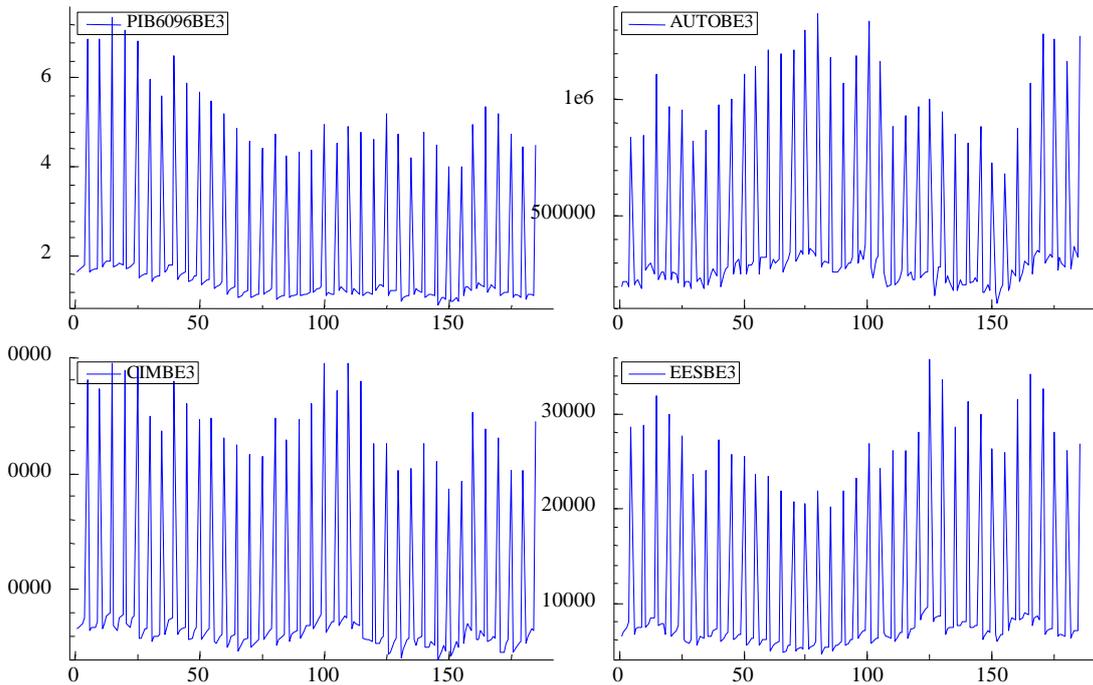


FIGURA A10: Séries Trimestrais Intercaladas com Totais Anuais



Apêndice B: Modelo de Nível Local

B.1 Filtros de Kalman e Suavização

Considere um modelo simples no qual a tendência $\mu_t = \alpha_t$, onde α_t é um *random walk*, sem sazonais e com todas as variáveis normalmente distribuídas. Assuma que o termo de erro ε_t tem variância constante σ_ε^2 . Este modelo é dado por

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2), \\ \alpha_{t+1} &= \alpha_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

para $t = 1, \dots, n$ onde os ε_t 's e η_t 's são todos mutuamente independentes e independentes de α_1 . Embora simples, o modelo – conhecido como modelo Gaussiano linear de estado de espaço – fornece a base para diversos problemas práticos de análise de séries temporais. Ele apresenta a estrutura característica de modelos de estado de espaço no qual existe uma série de valores não observados $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, que representa o desenvolvimento ao longo do tempo do sistema em estudo, e um conjunto de observações y_1, \dots, y_n que estão relacionadas aos estados α_t 's através do modelo de espaço de estado (B.1). O objeto da metodologia é inferir propriedades relevantes dos α_t 's a partir de um conhecimento das observações y_1, \dots, y_n .

Assumimos inicialmente que $\alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$ onde a_1 e P_1 são conhecidos e que σ_ε^2 e σ_η^2 também sejam conhecidos. Dado que, *random walks* são não estacionários o modelo é não estacionário.

Para aplicações do modelo a séries observadas, precisamos computar quantidades tais como a média de α_t dado y_1, \dots, y_{t-1} ou a média de α_t dado y_1, \dots, y_n , juntamente com as suas variâncias; precisamos também ajustar o modelo aos dados calculando estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros σ_ε^2 e σ_η^2 . A metodologia proposta para realização desta tarefa é a de empregar técnicas de filtragem e suavização descritas a seguir.

O objeto da filtragem é atualizar nosso conhecimento do sistema cada vez que uma nova observação y_t seja conhecida. Dado que todas as distribuições são normais, as distribuições conjuntas condicionais de um conjunto de observações, dado outro conjunto, também são normais. Seja Y_{t-1} o conjunto de observações passadas $\{y_1, \dots, y_{t-1}\}$ e assumamos que a distribuição condicional de α_t dado Y_{t-1} é $N(a_t, P_t)$, onde a_t e P_t têm de ser determinados. Dado que a_t e P_t são conhecidos, o objetivo é calcular a_{t+1} e P_{t+1} quando y_t passa a ser conhecido. Isto é feito usando resultados bem conhecidos da teoria da regressão.

O conjunto das relações para atualização de $t + 1$ a partir de t , o filtro de Kalman, é dado por

$$\begin{aligned} v_t &= y_t - a_t, & F_t &= P_t + \sigma_\varepsilon^2, & K_t &= P_t / F_t, \\ a_{t+1} &= a_t + K_t v_t, & P_{t+1} &= P_t (1 - K_t) + \sigma_\eta^2, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

para $t = 1, \dots, n$. Note que a_1 e P_1 são assumidos conhecidos e que P_t depende apenas de σ_ε^2 e σ_η^2 e não depende de Y_{t-1} .

Os resíduos do filtro de Kalman $v_t = y_t - a_t$ e sua variância F_t são respectivamente os erros de previsão e a variância do erro um passo a frente de y_t dado Y_{t-1} . Os erros de previsão são chamados de inovação porque representam a nova parte de y_t que não pode ser predita pelo passado $t = 1, \dots, n$.

Definamos o erro de estimação do estado como sendo

$$x_t = \alpha_t - a_t, \quad \text{Var}(x_t) = P_t. \quad (\text{B.3})$$

Segue do Filtro de Kalman que

$$v_t = x_t + \varepsilon_t, \quad x_{t+1} = L_t x_t + \eta_t - K_t \varepsilon_t, \quad L_t = 1 - K_t = \sigma_\varepsilon^2 / F_t. \quad (\text{B.4})$$

Analogamente, essas relações valem para o modelo de nível local (B.1), $t = 1, \dots, n$, com $x_1 = \alpha_1 - a_1$.

Agora consideremos a estimação de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, dada a amostra inteira Y_n . Desde que todas as distribuições sejam normais, a densidade condicional de α_t dado $y = (y_1, \dots, y_n)$ é $N(\hat{\alpha}_t, V_t)$, onde $\hat{\alpha}_t = E(\alpha_t | y)$ e $V_t = \text{Var}(\alpha_t | y)$. $\hat{\alpha}_t$ é o estado suavizado, V_t é a variância do estado suavizado, e a operação de calcular $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n$ é chamada suavização dos estados.

Os erros de previsão v_1, \dots, v_n são mutuamente independentes e são uma transformação linear de y_1, \dots, y_n , e os v_i 's são independentes de y_1, \dots, y_{t-1} com média zero. Além disso, quando os y_1, \dots, y_n estão fixos, Y_{t-1} e v_1, \dots, v_n são fixos e vice-versa. Usando as propriedades da teoria da regressão normal multivariada, obtemos

$$\hat{\alpha}_t = E(\alpha_t | y) = a_t + \sum_{j=t}^n \text{Cov}(\alpha_t, v_j) F_j^{-1} v_j. \quad (\text{B.5})$$

Chegando então às recursões do estado suavizado

$$r_{t-1} = F_t^{-1} v_t + L_t r_t, \quad \hat{\alpha}_t = a_t + P_t r_{t-1}, \quad t = n, \dots, 1, \quad (\text{B.6})$$

com $r_n = 0$, para $t = n, n-1, \dots, 1$, e

$$r_{t-1} = \frac{v_t}{F_t} + L \frac{v_{t+1}}{F_{t+1}} + L_t L_{t+1} \frac{v_{t+2}}{F_{t+2}} + \dots + L_t L_{t+1} \dots L_{n-1} \frac{v_n}{F_n}, \quad (\text{B.7})$$

é uma soma ponderada das inovações depois de $t - 1$. Note-se que o estado suavizado é calculado por *backwards recursion*.

A variância dos estados suavizados pode ser calculada pelas recursões para trás dadas por

$$N_{t-1} = F_t^{-1} + L_t^2 N_t, \quad V_t = P_t - P_t^2 N_{t-1}, \quad t = n, \dots, 1, \quad (\text{B.8})$$

com $N_n = 0$ e

$$N_{t-1} = \frac{1}{F_t} + L_t^2 \frac{1}{F_{t+1}} + L_t^2 L_{t+1}^2 \frac{1}{F_{t+2}} + \dots + L_t^2 L_{t+1}^2 \dots L_{n-1}^2 \frac{1}{F_n},$$

é uma soma ponderada das variâncias inversas das inovações depois do instante $t - 1$. Das recursões acima tem-se que $\text{Var}(r_t) = N_t$ dado que os erros de previsão v_t são independentes. Com os erros padrão $\sqrt{V_t}$ de $\hat{\alpha}_t$, podem ser construídos intervalos de confiança para α_t para $t = 1, \dots, n$.

Consideremos agora o cálculo dos erros suavizados das observações $\hat{\varepsilon}_t = E(\varepsilon_t | y) = y_t - \hat{\alpha}_t$ e dos distúrbios suavizados dos estados $\hat{\eta}_t = E(\eta_t | y) = \hat{\alpha}_{t+1} - \hat{\alpha}_t$, juntamente com as variâncias destes erros. Os distúrbios suavizados das observações são calculados por

$$\hat{\varepsilon}_t = \sigma_\varepsilon^2 u_t, \quad u_t = F_t^{-1} v_t - K_t r_t, \quad t = n, \dots, 1, \quad (\text{B.9})$$

e sua variância suavizada por

$$\text{Var}(\varepsilon_t | y) = \sigma_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^4 D_t, \quad D_t = F_t^{-1} + K_t^2 N_t, \quad t = n, \dots, 1, \quad (\text{B.10})$$

onde as recursões de N_t são dadas por (B.8). Dado que v_t é independente de r_t e $\text{Var}(r_t) = N_t$, temos que $\text{Var}(u_t) = D_t$.

O erro suavizado dos estados é calculado por

$$\hat{\eta}_t = \sigma_\eta^2 r_t, \quad t = n, \dots, 1, \quad (\text{B.11})$$

onde a recursão de r_t é dada por (B.6). Sua variância suavizada é computada por

$$\text{Var}(\eta_t | y) = \sigma_\eta^2 - \sigma_\eta^4 N_t \quad t = n, \dots, 1, \quad (\text{B.12})$$

onde as recursões de N_t é dada por (B.8). Dado que $\text{Var}(r_t) = N_t$, temos que $\text{Var}(\hat{\eta}_t) = \sigma_\eta^4 N_t$. Esses resultados são interessantes porque fornecem uma interpretação para os valores de r_t e N_t ; eles são respectivamente as estimativas suavizadas com escala de $\eta_t = \alpha_{t+1} - \alpha_t$ e de sua variância não condicional.

B.2 Inicialização

Assumimos no início que a distribuição do estado inicial α_1 é $N(a_1, P_1)$, onde a_1 e P_1 são conhecidos. Agora consideremos como começar o filtro (B.2) quando nada é conhecido sobre a distribuição de α_1 , o que na prática é a situação usual. Nessa situação, representa-se α_1 como tendo uma densidade a priori difusa, isto é, fixa-se a_1 em um valor arbitrário e deixa-se $P_1 \rightarrow \infty$. De (B.2) temos

$$v_1 = y_1 - a_1, \quad F_1 = P_1 + \sigma_\varepsilon^2$$

e, substituindo a_2 e P_2 em (B.2), segue que

$$P_2 = \frac{P_1}{P_1 + \sigma_\varepsilon^2} \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2. \quad (\text{B.13})$$

Fazendo $P_1 \rightarrow \infty$, obtemos $a_2 = y_1$, $P_2 = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2$, e então prossegue-se normalmente com o filtro de Kalman (B.2) para $t = 2, \dots, n$. Esse procedimento é chamado inicialização difusa do filtro de Kalman e o filtro resultante de filtro de Kalman difuso. Note-se que os mesmos valores de a_1 e P_1 para $t = 2, \dots, n$ podem ser obtidos tratando y_1 como fixo e tomando $\alpha_1 \sim N(y_1, \sigma_\varepsilon^2)$, o que é razoável na ausência de informação sobre a distribuição marginal de α_1 , posto que $(y_1 - \alpha_1) \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ⁵⁵.

É necessário também ter em conta a distribuição difusa do estado inicial α_1 nas recursões de suavização. Dos parágrafos anteriores, vimos que as equações de filtragem para “não” são afetadas fazendo $P_1 \rightarrow \infty$. Portanto, as equações dos estados e dos distúrbios de suavização também não são afetadas para $t = n, \dots, 2$, dado que elas dependem apenas dos resultados do filtro de Kalman. De (B.6) a média suavizada do estado α_1 quando $P_1 \rightarrow \infty$ é dada por $\hat{\alpha}_1 = a_1 + v_1 + \sigma_\varepsilon^2 r_1$, e substituindo v_1 obtém-se $\hat{\alpha}_1 = y_1 + \sigma_\varepsilon^2 r_1$.

A variância condicional suavizada do estado α_1 , dado y quando $P_1 \rightarrow \infty$, é igual a $V_1 = \sigma_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^4 N_1$.

A variância média suavizada dos distúrbios obtidos em (B.9) para $t = 1$ e fazendo $P_1 \rightarrow \infty$ é dada por $\hat{\varepsilon}_1 = -\sigma_\varepsilon^2 r_1$. Note-se que r_1 depende dos resultados do filtro de Kalman para $t = 2, \dots, n$, e a variância desses distúrbios para $t = 1$ por (B.10) depende de D_1 e N_1 , sendo que apenas D_1 é afetado por $P_1 \rightarrow \infty$; assim obtemos $D_1 = N_1$ e,

⁵⁵ Contudo, a inicialização do filtro de Kalman representando α_1 como uma variável aleatória com variância infinita é a mesma que assumindo α_1 como fixo e desconhecido e estimando-o a partir de y_1 (ver DK, 2004).

portanto, $\text{Var}(\hat{\epsilon}_1) = \sigma_\epsilon^4 N_1$. A variância das estimativas suavizadas de η_1 permanece inalterada como $\text{Var}(\hat{\eta}_1) = \sigma_\epsilon^4 N_1$.

B.3 Estimação de Parâmetros

As definições do modelo estão dadas. Os algoritmos de filtragem e suavização estão associados com a forma do estado de espaço e podem ser aplicados condicionalmente sobre os estados e o sistema de matrizes de erros conhecidos. Os valores não conhecidos dentro dessas matrizes são tratados como parâmetros que precisam ser estimados. O próximo passo é estimar estes parâmetros usando métodos de máxima verossimilhança.

Consideremos brevemente a questão de ajustar o modelo de nível local aos dados do ponto de vista da inferência clássica⁵⁶. Com efeito, isso envolve derivar uma quantidade de fórmulas, sob a hipótese de que os parâmetros são conhecidos, e então substituí-los pelas estimativas de máxima verossimilhança. Parâmetros em modelos de espaço de estado são chamados hiperparâmetros.

O cálculo da log de verossimilhança considera a densidade conjunta

$$p(y_1, \dots, y_t) = p(Y_{t-1})p(y_t | Y_{t-1}),$$

$t = 2, \dots, n$, pode ser expressa como $p(y) = \prod_{t=1}^n p(y_t | Y_{t-1})$, onde $p(y_1 | Y_0) = p(y_1)$. Agora $p(y_t | Y_{t-1}) = N(a_t, F_t)$ e $v_t = y_t - a_t$, assim tomando logs e assumindo que a_1 e P_1 sejam conhecidos, a log de verossimilhança é dada por

$$\log L = \log p(y) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left(\log F_t + \frac{v_t^2}{F_t} \right). \quad (\text{B.14})$$

A log de verossimilhança exata pode ser portanto construída a partir do Filtro de Kalman (B.2).

Alternativamente, a log de verossimilhança pode ser derivada do modelo de nível local sob a forma matricial, o que fornece a expressão

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\Omega| - \frac{1}{2} (y - a_1 1)' \Omega^{-1} (y - a_1 1),$$

que segue da distribuição normal multivariada $y \sim N(a_1 1, \Omega)$ ⁵⁷.

A log de verossimilhança pode ser então definida no caso difuso mantendo todos os termos finitos à medida que $P_1 \rightarrow \infty$ com y fixo exceto o termo para $t=1$. Para remover a influência de P_1 quando $P_1 \rightarrow \infty$, define-se a log de verossimilhança *difusa* como sendo

$$\log L_d = \lim_{P_1 \rightarrow \infty} \left(\log L + \frac{1}{2} \log P_1 \right) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(\log F_t + \frac{v_t^2}{F_t} \right), \quad (\text{B.15})$$

desde que $F_1/P_1 \rightarrow 1$ e $v_1^2/F_1 \rightarrow 0$ quando $P_1 \rightarrow \infty$. Observe que v_t e F_t permanecem finitos quando $P_1 \rightarrow \infty$ para $t = 2, \dots, n$.

Dado que P_1 não depende de σ_ϵ^2 e σ_μ^2 , os valores desses parâmetros que maximizam $\log L$ são idênticos aos valores que maximizam $\log L + 1/2 \log P_1$. Quando $P_1 \rightarrow \infty$, esses valores convergem para valores que maximizam $\log L_d$ porque as

⁵⁶ Para o caso de estimações envolvendo o modelo Gaussiano linear geral e tratamentos Bayesianos de estimação, ver DK (2004).

⁵⁷ Note que $1 = (1, \dots, 1)'$.

primeiras e as segundas derivadas com respeito a σ_ε^2 e σ_μ^2 são finitas e estritamente negativas. Segue que os estimadores de máxima verossimilhança de σ_ε^2 e σ_μ^2 , obtidos maximizando (B.14), convergem para valores obtidos através da maximização de (B.15) quando $P_1 \rightarrow \infty$ (cf. DK, 2004).

Os parâmetros desconhecidos σ_ε^2 e σ_μ^2 são estimados maximizando-se numericamente as expressões (B.14) e (B.15), tendo em conta se a_1 e P_1 são conhecidos ou não. Na prática é mais conveniente maximizar numericamente com respeito às quantidades $\psi_\varepsilon = \log \sigma_\varepsilon^2$ e $\psi_\eta = \log \sigma_\eta^2$ (ver KHDS, 2000). O procedimento de otimização é baseado no esquema de quasi-Newton, conhecido como BFGS (ver DK, 2004).

É mais vantajoso reparametrizar o modelo antes da maximização, de modo a reduzir a dimensão para a pesquisa/iteração numérica. Por exemplo, no modelo de nível local, podemos colocar $q = \sigma_\eta^2 / \sigma_\varepsilon^2$ de modo a obter o modelo

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma_\varepsilon^2), \\ \alpha_{t+1} &= \alpha_t + \eta_t, & \eta_t &\sim N(0, q \sigma_\varepsilon^2), \end{aligned}$$

e estimar o par σ_ε^2, q no lugar de σ_ε^2 e σ_μ^2 . Colocando $P_t^* = P_t / \sigma_\varepsilon^2$ e $F_t^* = F_t / \sigma_\varepsilon^2$, de (B.2) e da seção anterior o filtro de Kalman difuso para o modelo de nível local reparametrizado é então

$$\begin{aligned} v_t &= y_t - a_t, & F_t^* &= P_t^* + 1 \\ a_{t+1} &= a_t + K_t v_t, & P_{t+1}^* &= P_t^* (1 - K_t) + q, \end{aligned}$$

onde $K_t = P_t^* / F_t^* = P_t / F_t$ para $t = 2, \dots, n$, e ele é inicializado com $a_2 = y_1$ e $P_2^* = 1 + q$. Note-se que F_t^* depende de q mas não de σ_ε^2 . A log de verossimilhança (B.15) torna-se

$$\log L_d = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n-1}{2} \log \sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left(\log F_t^* + \frac{v_t^2}{\sigma_\varepsilon^2 F_t^*} \right). \quad (\text{B.16})$$

Maximizando (B.16) com respeito a σ_ε^2 , para dados F_2^*, \dots, F_n^2 , obtemos

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n \frac{v_t^2}{F_t^*}. \quad (\text{B.17})$$

O valor de $\log L_d$ obtido substituindo σ_ε^2 por $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ em (B.16) é chamado de log da verossimilhança concentrada difusa e é denotado por $\log L_{dc}$, fornecendo

$$\log L_{dc} = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{2} \log \sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \log F_t^*. \quad (\text{B.18})$$

Essa função é maximizada com respeito a q através de uma pesquisa/iteração numérica unidimensional.

B.4 Steady State

Considere a convergência do filtro de Kalman para um valor de steady state quando $n \rightarrow \infty$. Este será o caso se P_t converge para um valor positivo \bar{P} . Assim, teríamos $F_t \rightarrow \bar{P} + \sigma_\varepsilon^2$ e $K_t \rightarrow \bar{P} / \bar{P} + \sigma_\varepsilon^2$. Para checar se existe um steady state, faça $P_{t+1} = P_t = \bar{P}$ em (B.2) e verifique se a equação resultante em \bar{P} tem uma solução positiva. A equação é

$$\bar{P} = \bar{P} \left(1 - \frac{\bar{P}}{\bar{P} + \sigma_\varepsilon^2} \right) + \sigma_\eta^2,$$

que se reduz para a forma quadrática $x^2 - xh - h = 0$, onde $x = \bar{P}/\sigma_\varepsilon^2$ e $h = \sigma_\eta^2/\sigma_\varepsilon^2$, com solução $x = (h + \sqrt{h^2 + 4h})/2$.

Ela é positiva quando $h > 0$, o que vale para modelos não-triviais. Quando negativa, ela é inaplicável para $h > 0$. Assim, todo modelo de nível local não-trivial tem uma solução de steady state.

A vantagem prática de o modelo ter uma solução de steady state é que, uma vez verificado que a convergência de P_t para \bar{P} esteja muito próxima, podemos parar o cômputo de F_t e K_t . Assim, o filtro de Kalman se reduz a uma única relação $a_{t+1} = a_t + \bar{K}v_t$, com $\bar{K} = \bar{P}/(\bar{P} + \sigma_\varepsilon^2)$ e $v_t = y_t - a_t$. O que é uma propriedade importante para modelos mais complicados, onde P_t pode ser uma matriz muito grande.

Apêndice C: Matrizes do Modelo de *Benchmarking*

Abaixo apresentamos o grupo de matrizes referente a um modelo de *benchmarking* univariado com nível, dummies sazonais, sem efeito calendário e termo de erro de medida, juntamente com os vetores de estados α_t e de choques de estado $\tilde{\eta}_t$, associados as matrizes. Note-se que por conveniência o vetor de observações está inserido dentro do vetor de estado. Lembremos que o modelo espaço de estado é dado por

$$\begin{aligned} y_t &= Z_t \alpha_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim N(0, H_t), \\ \alpha_{t+1} &= T_t \alpha_t + R_t \eta_t, & \eta_t &\sim N(0, Q_t), & t = 1, \dots, n. & (3.10) \\ \alpha_1 &\sim N(a_1, P_1), \end{aligned}$$

onde no modelo univariado y_t tem uma variável e no modelo multivariado quatro variáveis empilhadas.

Para os Y 's (trimestres), as matrizes são

$$Z_t = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1],$$

$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi \end{bmatrix},$$

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para os X 's (totais anuais), as matrizes são

$$Z_t = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1],$$

$T_t =$ Identidade 12 x 12,

$$R_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os vetores de estados e de choques de estados são respectivamente os seguintes

$$\alpha_t' = [\mu_t, \mu_{t-1}, \mu_{t-2}, \mu_{t-3}, \gamma_t, \gamma_{t-1}, \gamma_{t-2}, \gamma_{t-3}, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3}, \xi_t^s]$$

e,

$$\tilde{\eta}_t' = [\eta_t, \omega_t, \varepsilon_t^*, \kappa_t].$$

As matrizes abaixo se referem a um modelo de *benchmarking* com quatro variáveis dependentes (vetor de medidas com dimensão 4), uma delas sendo o PIB. A especificação de cada variável é a mesma do modelo univariado. As matrizes Z_t , T_t , e R_t

possuem uma dimensão a menos que as matrizes do modelo univariado, porque delas foi retirado o erro de medida ξ_t , o qual é recolocado posteriormente.

O procedimento de construção das matrizes segue os seguintes passos: (i) reconstruir as matrizes do modelo univariado sem considerar o erro de medida, para os Y 's e para os X 's, as quais não são reapresentadas; (ii) construir as matrizes $\tilde{Z}_t = Z_t \otimes I_4$, $\tilde{T}_t = T_t \otimes I_4$, e $\tilde{R}_t = R_t \otimes I_4$, nas quais \otimes é o produto de Kronecker; (iii) construir as matrizes finais, que aparecem a seguir, montadas a partir dos componentes descritos, seguidas da matrizes bloco-diagonais de covariância Q_t e H_t .

Para os Y 's (trimestres) as matrizes são

$$\bar{Z}_t = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (\tilde{Z}_t) \end{pmatrix}, \quad \bar{T}_t = \begin{pmatrix} (\tilde{T}_t) & \begin{pmatrix} 0 \\ 48 \times 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \times 48 \end{pmatrix} & (\phi) \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_t = \begin{pmatrix} (\tilde{R}_t) & \begin{pmatrix} 0 \\ 48 \times 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \times 12 \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$Q = \text{diagcat}(\Sigma_\eta, \Sigma_\omega, \Sigma_\varepsilon, \sigma_\xi).$$

Para os X 's (totais anuais), as matrizes são

$$\bar{Z}_t = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (\tilde{Z}_t) \end{pmatrix}, \quad \bar{T}_t = \begin{pmatrix} (\tilde{T}_t) & \begin{pmatrix} 0 \\ 48 \times 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \times 48 \end{pmatrix} & (1) \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_t = \begin{pmatrix} (\tilde{R}_t) & \begin{pmatrix} 0 \\ 48 \times 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \times 12 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$Q = \text{diagcat}(\Sigma_\eta, \Sigma_\omega, \Sigma_\varepsilon, \sigma_\xi).$$

Observe que as matrizes do passo (ii) devem ter as dimensões 48×4 (\tilde{Z}_t), 48×48 (\tilde{T}_t) e 8×12 (\tilde{R}_t), tanto para os Y 's (trimestres) quanto para os X 's (totais anuais). E que os blocos de Q_t são “cheios” porque as componentes de mesma interpretação são correlacionadas. A matriz σ_ξ (4×1) é univariada pois existe um erro de medida, e este é associado ao PIB.

O vetor de espaço do modelo multivariado não é apresentado, em função da sua dimensão (37×1). Porém ele nada mais é do o vetor de estado do modelo univariado com cada grupo de componentes repetido quatro vezes devidamente indexados pelo número da variável dependente (quatro) correspondente.

O vetor de choques de estado é dado por

$$\bar{\eta}_t' = [\eta_{t1}, \eta_{t2}, \eta_{t3}, \eta_{t4}, \omega_{t1}, \omega_{t2}, \omega_{t3}, \omega_{t4}, \varepsilon_{t1}^*, \varepsilon_{t2}^*, \varepsilon_{t3}^*, \varepsilon_{t4}^*, \kappa_t]$$

Os η 's estão associados aos níveis; os ω 's às sazonalidades; os ε^* 's às componentes irregulares; e κ_t é o choque do erro de medida do PIB; lembrando que este erro de medida segue um AR(1), como evidenciado pela matriz \bar{T} relativa aos Y 's (trimestres).